

Научная статья / Research Article  
<https://doi.org/10.55959/LPEJ-24-08>  
УДК/UDC 159.9.075, 159.922.8

## К вопросу о преподавании математики в начальной школе: опыт экспериментального обучения

М.А. Степанова<sup>1, 2</sup> ✉

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Федеральный научный центр психологических и междисциплинарных  
исследований, Москва, Российская Федерация

✉ [marina.stepanova@list.ru](mailto:marina.stepanova@list.ru)

### Резюме

**Актуальность.** В статье обсуждается проблема психологических оснований содержания и методов школьного обучения на примере курса математики начальной школы.

**Цель.** Педагогический и психологический анализ авторской программы по математике Я.И. Абрамсона, которая базируется на теории поэтапного формирования умственных действий и понятий П.Я. Гальперина.

**Результаты.** С опорой на представления Л.С. Выготского о соотношении обучения и умственного развития и теорию поэтапного формирования умственных действий и понятий П.Я. Гальперина, дается научно-психологическое обоснование авторской программы по математике Я.И. Абрамсона для младших школьников, приводится ее краткое описание с последующим психологическим анализом результатов апробации в школах Москвы. Показана высокая эффективность данной программы.

**Выводы.** Полученные данные выступают практическим подтверждением результативности обучения, построенного по третьему типу ориентировки и учения в теории П.Я. Гальперина. Кроме того, они наглядно демонстрируют верность положения П.Я. Гальперина о необходимости выделения предмета изучаемой области с первых шагов школьного обучения, что, в свою очередь, лишний раз иллюстрирует эвристический потенциал общепсихологической теории П.Я. Гальперина и возможности ее приложения к различным областям

социальной практики, в первую очередь при решении образовательных проблем.

**Ключевые слова:** деятельностная теория учения, действие, учение, формирование понятий, формирующий метод, умственное развитие, педагогическая психология, дидактика, образование, факультет психологии МГУ имени М.В. Ломоносова

**Для цитирования:** Степанова, М.А. (2024). К вопросу о преподавании математики в начальной школе: опыт экспериментального обучения. *Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование*, 22(1), 161–189. <https://doi.org/10.55959/LPEJ-24-08>

## On the Issue of Teaching Mathematics in Elementary School: Experiential Learning Experience

Marina A. Stepanova <sup>1,2</sup> ✉

<sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Federal Scientific Centre for Psychological and Multidisciplinary Research, Moscow, Russian Federation

✉ [marina.stepanova@list.ru](mailto:marina.stepanova@list.ru)

### Abstract

**Background.** The article discusses the issue of the psychological foundations of the content and methods of school teaching on the example of a mathematics course at primary school.

**Objectives.** The study focuses on the pedagogical and psychological analysis of Ya.I. Abramson's programme in mathematics, based on the theory of the gradual formation of mental actions and concepts by P.Ya. Galperin.

**Methods.** Theoretical analysis of publications reflecting the results of using the author's mathematics programme in school practice.

**Results.** Based on L.S. Vygotsky's ideas about the relationship between learning and mental development and the theory of the gradual formation of mental actions and concepts by P.Ya. Galperin, a scientific and psychological substantiation of Ya.I. Abramson's original programme in mathematics for teaching primary schoolchildren is provided. The research also provides a brief description of the programme followed by a psychological analysis of the results of testing in Moscow schools. This educational programme has been shown to be highly effective.

**Conclusions.** The data obtained serve as practical confirmation of the effectiveness of training based on the third type of orientation and learning in the theory of P.Ya. Galperin. In addition, they clearly demonstrate the correctness of P.Ya. Galperin's position on the need to highlight the subject matter of the area being studied from the first steps of school education, which, in turn, once again illustrates the heuristic potential of P.Ya. Galperin's general psychological theory and the possibility of its application to various areas of social practice, primarily in solving educational problems.

**Keywords:** activity theory of learning, action, learning, concept formation, formative method, mental development, educational psychology, didactics, education, Faculty of Psychology, Lomonosov Moscow State University

**For citation:** Stepanova, M.A. (2024). On the Issue of Teaching Mathematics in Elementary School: Experiential Learning Experience. *Lomonosov Pedagogical Education Journal*, 22(1), 161–189. <https://doi.org/10.55959/LPEJ-24-08>

Математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески.

А.Н. Колмогоров. «О профессии математика»

Проблемы обучения и воспитания, содержания и методов дошкольного и школьного образования носят междисциплинарный характер, а потому выступают предметом изучения не только педагогики, но и родственных с нею дисциплин. Психологические аспекты образовательного процесса издавна привлекают внимание исследователей, нацеленных на поиск педагогических условий, которые не только обеспечивают познавательное и личностное развитие детей, но и формируют у них способность адаптироваться к быстро меняющимся условиям жизни. А.Н. Леонтьев полвека назад писал: «Система образования должна сегодня формировать человека третьего тысячелетия. ...нынешним школьникам... в их будущей жизни придется усваивать знаний гораздо больше, чем сейчас. И к тому же уже несколько иных знаний. Поэтому не воспитать у них самостоятельности — значит, обречь их на драматические конфликты» (Леонтьев, 2009, с. 410). Об этом пишут не только психологи: так, известный ученый в области естественных наук И.М. Фейгенберг считает, что недостаточно научить решать

типовые задачи, чрезвычайно важно «научить непрерывно учиться, оперативно находить новые нужные знания, как только вновь возникшие задачи выявят необходимость в них» (Фейгенберг, 2008, с. 145). Выдающийся отечественный математик В. Арнольд говорил о вкладе математики в дело воспитания: «Особенно опасна тенденция изгнания всех доказательств из школьного обучения. Роль доказательств в математике подобна роли орфографии и даже каллиграфии в поэзии. Тот, кто в школе не научился искусству доказательства, не способен отличить правильное рассуждение от неправильного. Такими людьми легко манипулировать...» (Губарев, 2000, с. 2).

При этом особое внимание необходимо уделить начальным этапам обучения в школе. По образному выражению А.Г. Асмолова, «начальная школа — это зона ближайшего развития российского общества, где слова “инновационное общество”, “креативное общество” должны перестать быть декларациями, а должны стать делами. И тогда, перефразируя Выготского, можно сказать, что начальная школа поведет за собой развитие общества, а не будет плестись в хвосте развития» (Асмолов, 2012, с. 316).

Предметом нынешнего обсуждения выступает психологический анализ экспериментальной программы обучения по математике в начальной школе, построенной с опорой на представления об обучении и умственном развитии Л.С. Выготского и теорию поэтапного формирования умственных действий и понятий П.Я. Гальперина. Автор программы Я.И. Абрамсон в течение многих лет работал и продолжает работать по этой программе в различных школах Москвы; при этом наиболее продолжительным оказалось обучение детей в школе «Интеллектуал». Данная публикация — продолжение начатого в 2015 г. на страницах журнала «Вопросы психологии» обсуждения программы Я.И. Абрамсона по математике (Степанова, 2015) совместно с ее автором (Абрамсон, 2015). Главную проблему Я.И. Абрамсон сформулировал следующим образом: «...учить **вглубь** — решать олимпиадные задачи и задачи повышенной трудности, но в рамках общегосударственной школьной программы по математике, или **вширь** — обучать современным понятиям, не входящим в сегодняшнюю школьную программу, но позволяющим лучше понять в том числе содержание математики элементарной?» (Абрамсон, 2015, с. 59). По убеждению автора программы, одно не исключает другое, но актуальным видится совмещение двух обозначенных задач обучения школьной математике.

Психологический анализ различных программ обучения издавна выступал предметом пристального внимания исследователей. Сравнительный анализ результатов обучения по различным программам в начальной школе на материале математики не так давно был выполнен А.Н. Сидневой и коллегами, что получило отражение в публикациях (Сиднева, 2022; Сиднева и др., 2022). Авторы обратились к традиционным программам (УМК «Школа России», УМК «Планета знаний», УМК «Перспектива», УМК «Начальная школа 21 века»), программам «повышенного уровня трудности» (программа обучения математике И.И. Аргинской в дидактической системе Л.В. Занкова, программа обучения математике Л.Г. Петерсон, «Эффективная начальная школа») и программам развивающего обучения системы Эльконина — Давыдова. Они пришли к выводу о различной их эффективности с точки зрения усвоения общих и специфических математических умений. Представленные далее материалы можно рассматривать как продолжение начатого авторами разговора о преимуществах и недостатках различных программ обучения математике сквозь призму ключевой проблемы педагогической психологии — проблемы соотношения и обучения умственного развития. На принципиальные различия результатов усвоения математики в зависимости от организации процесса обучения обращали внимание и математики: «От преподавателя математики и в высшей, и в средней школе требуется не только твердое знание преподаваемой им науки. Хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую развивающуюся науку» (Колмогоров, 1973, с. 12).

### **Управление процессом усвоения**

Авторская программа по математике Я.И. Абрамсона получила отражение в публикациях (Абрамсон, 1993; 2012а; 2014; 2015а).

Обобщая опыт работы в начальной школе, Я.И. Абрамсон заметил следующее: немало детей младшего школьного возраста, особенно посещавших развивающие дошкольные группы и получивших широкую разностороннюю подготовку дома, поступив в школу и не имея адекватной их возможностям умственной нагрузки, испытывают интеллектуальный голод. В частности, анализ практики школьного обучения позволил Я.И. Абрамсону сделать вывод о том, что начальная школа зачастую не отвечает возможностям, запросам и потребностям поступающих в школу дошкольников (см., например, Абрамсон, 1993). Складывается парадоксальная ситуация, когда дети уже на самых

первых этапах школьного обучения теряют интерес к процессу получения знаний. Это и побудило Я.И. Абрамсона к созданию авторской программы по математике, рассчитанной на весь период школьного обучения. К настоящему времени детально разработана и прошла апробацию в школе «Интеллектуал» программа для начальной школы (Абрамсон, 2012а; 2014; 2015а). Кроме того, увидели свет пособия для учителей, работающих с учениками первых — третьих классов (Абрамсон, 2012; 2015; 2018; Абрамсон, Березкина, 2013).

Специально следует отметить, что вопросы обучения математики неоднократно выступали предметом изучения у отечественных психологов. В частности, под руководством П.Я. Гальперина, а впоследствии его учеников и последователей был выполнен ряд исследований, направленных на анализ различных аспектов овладения математическими понятиями (Буткин, 1968; Волович, 1967; Гальперин, 1965; 1985; Гальперин, Георгиев, 1960<sup>1</sup>; Гальперин, Талызина, 1957; Давыдов, 1958; 1966; 1969; Салмина, 1968; Салмина, Сохина, 1968; Сохина, 1968; Талызина, 1955; 1995 и др.). Полученные результаты впоследствии тщательно анализировались педагогами с целью возможной коррекции содержания и методов обучения. Также нужно сказать о предпринятых попытках построения учебного предмета с опорой на теорию поэтапного формирования умственных действий и понятий П.Я. Гальперина (см. об этом: Гальперин, Талызина, 1979; Талызина, 1992). Не так давно были опубликованы результаты лонгитюдного эксперимента 1965–1970 гг. по изучению формирования математических понятий в начальной школе, который был проведен под руководством и при непосредственном участии П.Я. Гальперина (Салмина, 2012). Обобщая полученные данные, Н.Г. Салмина отметила: «Эксперимент по формированию начальных математических понятий показал возможность применения ТПФУД в массовом обучении, поставил ряд проблем, выступивших предметом дальнейших исследований, однако не стал предметом активного обсуждения и анализа с точки зрения особенностей организации деятельности учащихся на основе ТПФУД в условиях массового обучения» (Салмина, 2012, с. 103).

Итоги изучения особенностей усвоения математических понятий в начальной и средней школе представлены в работах Н.Ф. Та-

---

<sup>1</sup> Интересно заметить: сам П.Я. Гальперин отмечал, что в исследованиях Георгиева особенно ясно выступило соотношение обучения и умственного развития (Гальперин, Эльконин, 2001).

лызиной (1988; 1995; 1998). Причину испытываемых школьниками трудностей при изучении математики, а также других учебных предметов, по мнению Н.Ф. Талызиной, следует искать в той психологической основе, на которую опирается учебный процесс. Обобщая результаты многолетних исследований, она делает принципиальный вывод: организация обучения с использованием деятельностной теории учения, заложенной трудами П.Я. Гальперина, позволяет всем учащимся начальной и средней школы успешно усваивать математику. Следование требованиям этой теории усвоения «позволяет *управлять* процессом усвоения» (Талызина, 1995, с. 7), на что в свое время обратил внимание П.Я. Гальперин. Он подчеркивал, что, организуя перенесение внешнего действия во внутренний, умственный план, превращая его в собственное достояние субъекта, «мы управляем этим процессом» (Гальперин, 2002, с. 216). Таким образом, получившее широкое распространение представление об обусловленности школьных успехов способностями детей не получило подтверждения.

Однако нужно с сожалением признать, что эти научные разработки не повлияли на школьную практику. По мнению А.И. Подольского, причину сложившегося положения дел следует искать в том, что «сама по себе теория планомерно-позатпного формирования умственной деятельности не является и никогда не являлась теорией и уж тем более технологией обучения» (Подольский, 2002, с. 25). Едва ли не самым главным условием эффективного практического применения положений теории П.Я. Гальперина является «не стремление к буквальному воспроизведению некой абстрактно-всеобщей процедуры, а творческое психологическое моделирование конкретной ситуации (обучения...)» (Подольский, 2023, с. 28). И только в этом последнем случае применение подхода П.Я. Гальперина дает высокие результаты. При этом сама система обучения — цели, содержание, метод, средства и оценка результатов — приобретает принципиально иной вид по сравнению с традиционным школьным обучением.

### **Теоретические и практические основания экспериментальной программы**

Прежде чем говорить о содержании представляемой учебной программы по математике, необходимо остановиться на ее научно-психологических положениях, или принципах. Также нужно добавить, что некоторые итоги апробации этой экспериментальной программы уже получили отражение в публикациях ее автора (см.,



например, Абрамсон, 1993; 2012а; 2015а и др.). Психологический анализ авторской программы выступил предметом и наших предыдущих исследований (Степанова, 2015; 2023).

**Методологическим основанием** для создания данной авторской методики выступила культурно-историческая психология Л.С. Выготского, в частности, разработка им проблемы соотношения обучения и умственного развития, которая рассматривалась им как основная проблема педагогической психологии.

К проблеме соотношения обучения и умственного развития Л.С. Выготский подошел исторически: он проанализировал три возможных подхода к ее решению и предложил свой, принципиально отличный от существовавших ранее. Согласно выдвинутой Л.С. Выготским гипотезе, обучение и развитие — не два независимых процесса или один и тот же процесс; существует «единство, но не тождество процессов обучения и внутренних процессов развития» (Выготский, 1991, с. 389; курсив наш. — М.С.). Приобретение знаний из курса анатомии человека или движение «вперед абстрактного мышления» — не одно и то же. Он утверждал, что между обучением и развитием существуют сложные отношения, которые и стали предметом его специальных исследований. Примерами таких исследований выступает изучение соотношения устной и письменной речи ребенка, соотношения житейских и научных понятий. Л.С. Выготский писал: «Обучение есть... внутренне необходимый и всеобщий момент в процессе развития у ребенка не природных, но исторических особенностей человека» (Выготский, 1991, с. 388).

Л.С. Выготский экспериментально показал на примере овладения письменной речью и грамматикой ведущую роль обучения в умственном развитии ребенка. По его мнению, «*обучение только тогда хорошо, когда оно идет впереди развития*» (Выготский, 1982, с. 252). При этом развитие «не исчерпывается схемой “больше-меньше”, а характеризуется в первую очередь именно наличием качественных новообразований» (Выготский, 1984, с. 247). Неслучайно принцип развития Л.С. Выготский назвал *принципом метаморфоз* (Выготский, 2001, с. 22): развитие не сводится к количественным изменениям, а имеет место качественное превращение одной формы в другую. Он сравнивал развитие ребенка с превращением гусеницы в куколку, а куколки в бабочку.

Такое представление о развитии позволило Л.С. Выготскому сделать важный вывод относительно обучения. «Обучение было бы



совершенно не нужно... если бы оно само не являлось источником развития, источником возникновения нового» (Выготский, 1982, с. 252). Когда обучение идет впереди развития, оно пробуждает к жизни целый ряд функций, находящихся в стадии созревания. Эта мысль была взята на вооружение отечественными исследователями и получила многочисленные экспериментальные и теоретические подтверждения, а также способствовала перестройке практики школьного обучения, что получило отражение при разработке ФГОСов.

Л.С. Выготский ввел в науку понятия «уровня актуального развития», который определяется с помощью самостоятельно решаемых задач ребенком, это и есть степень зрелости его психических функций, и «зоны ближайшего развития», которого ребенок достигает при решении задач в сотрудничестве со взрослым. «Исследование показывает, что зона ближайшего развития имеет более непосредственное значение для динамики интеллектуального развития и успешности обучения, чем актуальный уровень их развития» (Выготский, 1982, с. 247). На основании этого Л.С. Выготский сформулировал важное в теоретическом и практическом отношении заключение: «...оптимальные сроки обучения как для массового, так и для каждого отдельного ребенка устанавливаются в каждом возрасте зоной его ближайшего развития» (Выготский, 1984, с. 267). Однако в свете обсуждаемой нами проблемы хочется обратить внимание на мысль П.Я. Гальперина и Д.Б. Эльконина о недостаточности самого термина «зона ближайшего развития»: «Наличие “зоны” ничего не говорит о том, как происходит обучение и как в результате его совершается (если совершается) развитие мышления» (Гальперин, Эльконин, 2001, с. 310).

В школьном возрасте обучение и развитие относятся друг к другу как зона ближайшего развития и уровень актуального развития. По мнению Л.С. Выготского, возможность перехода ребенка от того, что он умеет делать самостоятельно, к тому, что он умеет делать в сотрудничестве, является самым чувствительным симптомом успешности умственной деятельности ребенка, она совпадает с зоной его ближайшего развития. Частным случаем общего исследования проблемы обучения и развития для Выготского явилось изучение соотношения спонтанных (житейских) и неспонтанных (научных) понятий. Он писал: «В сущности проблема... научных понятий есть проблема обучения и развития, ибо спонтанные понятия делают возможным самый факт возникновения их (научных понятий. — М.С.) из обучения, являющегося источником их развития» (Выготский, 1982, с. 224).

Таким образом, Л.С. Выготский выдвинул оригинальную гипотезу о психологических закономерностях развития ребенка, определяющей роли обучения в развитии. Он поставил важную в практическом отношении проблему содержания школьного обучения, направленного на усвоение системы научных понятий, но оставался открытым вопрос, как должно быть организовано это усвоение и, соответственно, какие условия будут способствовать или тормозить его успешное протекание. При этом нужно заметить, что в самом тезисе Л.С. Выготского «обучение ведет развитие» в скрытом виде необходимость такой специальной организации усвоения подразумевается.

В свете обсуждаемой проблемы представляет интерес обращение П.Я. Гальперина к проведенному Л.С. Выготским экспериментальному исследованию развития понятий у ребенка. П.Я. Гальперин подчеркивал, что при формировании понятий по методике поэтапного формирования умственных действий не возникает ни комплексов, ни псевдопонятий, ни промежуточных форм из элементов житейских и научных понятий. «...ребенок не может ни пропустить какой-нибудь существенный признак понятия, ни привнести в него что-нибудь несущественное» (Гальперин, 1965, с. 22). Причину отличия этих данных от известных данных Л.С. Выготского П.Я. Гальперин объяснял особенностями процедуры экспериментального исследования: если Выготский изучал возможности самостоятельного формирования понятий, то при поэтапном формировании изучалась возможность обучения детей этому действию. И П.Я. Гальперин сделал чрезвычайно важный в практическом отношении вывод, который не только не потерял своей актуальности, но и приобрел еще более современное звучание. Он утверждал: «...ход формирования понятий в современном школьном обучении, которое... контролирует процесс только по *конечному результату*, нельзя рассматривать как *нормативы психического развития и естественные границы обучения*» (Гальперин, 1965, с. 23; курсив наш. — М.С.).

**Теоретическим основанием** авторской программы по математике послужила теория П.Я. Гальперина и, прежде всего, его учение о трех типах ориентировки и их связи с умственным развитием. Несмотря на то, что П.Я. Гальперин не был ни педагогическим психологом, ни педагогом, он обращал внимание на значение разработанной им общепсихологической теории для практики образования. Наверное, неслучайно последняя прижизненная конференция по случаю

80-летия П.Я. Гальперина имела такое название: «Значение теории П.Я. Гальперина о поэтапном формировании умственных действий для развития психологической науки и совершенствования практики обучения» (см. об этом: Степанова, 2017). Он подчеркивал, что благодаря организации в ходе обучения деятельности ребенка «получено новое решение старой проблемы — проблемы выравниваемости успеваемости внутри достаточной массы людей» (Гальперин, 2002, с. 217). При использовании метода планомерного формирования общеобразовательная программа для всех нормальных детей оказывается доступной. П.Я. Гальперин писал: «...наступает выравнивание успеваемости. Я хочу подчеркнуть: успеваемости, а не способностей. ...мы их не отрицаем, и они также должны иметь свое объяснение. Но по отношению к общеобразовательной программе вы можете получить выравнивание успеваемости» (Гальперин, 2002, с. 218). Он специально подчеркивал: «...должен быть другой подход к массовому обучению — через *изменение методики преподавания*» (Гальперин, 2002, с. 251; курсив наш. — М.С.).

Как справедливо отмечал В.П. Зинченко, «биографически, содержательно и духовно П.Я. Гальперин был связан со школой Л.С. Выготского... Но сохраняя этот культурно-исторический код, не следует забывать, что П.Я. Гальперину принадлежит свой корпус идей, на основе которых позднее сложилась его собственная научная школа» (Зинченко, 2002, с. 120). Если для Л.С. Выготского главным вопросом было *чему учить*, то П.Я. Гальперин сосредоточил внимание на проблеме *чему и как учить*. П.Я. Гальперин, с одной стороны, говорил о необходимости передачи ребенку обобщенных знаний, а с другой стороны, занимался вопросами разработки методов обучения. При чем вопрос *чему учить* логически вытекает из вопроса *как учить*. Именно этот аспект получил отражение в последней прижизненной публикации П.Я. Гальперина «Методы обучения и умственное развитие ребенка» (Гальперин, 1985).

Позиция П.Я. Гальперина может быть представлена следующим образом. При традиционном обучении усвоение знаний происходит без достаточного руководства со стороны педагога и контролируется по конечному результату. П.Я. Гальперин в качестве предмета усвоения рассматривал действие и поставил задачу — выяснить условия, «учет которых не только обеспечивает, но, можно сказать, даже вынуждает ученика действовать правильно и только правильно» (Гальперин, 1998, с. 428). Эта система, которая получила название

*планомерно-поэтапное формирование умственных действий и понятий, включает четыре группы условий* (Гальперин, 1985, с. 4):

- формирование адекватной мотивации ученика;
- обеспечение правильного выполнения действия;
- воспитание его желаемых свойств;
- превращение его в умственное действие (в его желаемую форму).

При такой организации обучения новое действие формируется легче и скорее, чем в условиях традиционного школьного обучения. Это обеспечивается главным образом за счет исключения проб и ошибок в начальный период становления действия. Достоинства разработанного П.Я. Гальпериним метода обучения, который «позволял ребенку после анализа нескольких первых объектов самостоятельно исследовать любой новый объект того же рода, устанавливать его строение и его характерные признаки, по ним самостоятельно воспроизводить его и в действии усваивать и знание объекта, и действия с ним» (Гальперин, 1985, с. 30), были продемонстрированы и автором теории, а впоследствии и его учениками на разном учебном материале, и в том числе — что для нас особенно важно в данном случае — на начальных математических понятиях.

Отличие этого метода обучения, как писал сам автор, от традиционного формирования понятий бросается в глаза. П.Я. Гальперин дал подробную характеристику типов учения, каждый из которых отличается «своей ориентировкой в предмете, своим ходом процесса учения, качеством его результатов и отношением детей к процессу и предмету учения» (Гальперин, 1985, с. 30). *При первом типе учения ориентировочная основа действия (ООД) неполная, что обуславливает многочисленные пробы и ошибки. В этом случае формирование действия происходит на основе контроля по конечному результату, что не обеспечивает соотнесения условий с конкретными операциями. Поэтому действие очень неустойчиво к изменению условий обстановки и ограничено в переносе на новые задания.*

*Второй тип учения характеризуется построением отдельного конкретного действия на полной ориентировочной основе, пробы и ошибки становятся случайными и нехарактерными. Каждая операция четко соотносится с условиями, и в результате действие разумно (в рамках конкретных условий), обобщено (в заранее намеченном объеме) и сознательно. Сформированное действие устойчиво к изменению условий, перенос значителен, но зависит от степени идентичности входящих в состав действия элементов.*

Обучение по *третьему типу* предполагает ориентировку на основные единицы материала, законы их объединения, методы определения того и другого и самостоятельное построение ООД для конкретных объектов. Полная ООД обеспечивает формирование действий и понятий без проб и ошибок; разумными становятся не только действия в смысле соотношения с условиями, но и сами условия, раскрывающиеся в своем внутреннем строении. Действие обладает возможностью полного и широкого переноса. Такое обучение воспитывает не только сознательное отношение к своим действиям, но и «высшую сознательность с точки зрения объективного положения и движения самих вещей» (Гальперин, 1998, с. 311). По мнению П.Я. Гальперина, овладение объективным критерием и особенно переход «на позиции такого в собственном смысле опосредованного подхода» (Гальперин, 1998, с. 311) к действительности производит «переворот в мышлении ребенка» (Гальперин, 1998, с. 311).

Типы учения отличаются не только построением предмета, но и определенным способом его преподнесения учителем и построением ориентировки учеником. Разное обучение, естественно, оказывает разное влияние на умственное развитие. При обучении по первому типу идет накопление узких знаний и умений, развитие мышления и способностей происходит как бы помимо обучения; второй тип обучения также не оказывает влияния на умственное развитие, что объясняется тем, что он воспитывает не теоретический, познавательный, а прикладной интерес к знаниям. И только обучение по третьему типу дает принципиально иную картину — оно формирует установку на исследование. «...Первое и главное в третьем типе учения — это возбуждение познавательной деятельности, все большее укрепление и развитие собственно познавательного интереса» (Гальперин, 1985, с. 34), что и обуславливает мощный развивающий эффект обучения.

П.Я. Гальперин в третьем типе учения видит два начала: метод исследования объектов и метод вовлечения в это исследование, которые неразрывно связаны между собой: «установка на изучение объекта... помещает основную цель деятельности в самый процесс познания... возбуждает собственно познавательный интерес... и побуждает к использованию тех возможностей, которые открывает метод исследования» (Гальперин, 1985, с. 36).

На основании проведенных исследований П.Я. Гальперин сделал важный вывод относительно возрастных возможностей усвоения научных понятий: уже в старшем дошкольном возрасте при использовании методики поэтапного формирования возможно

образование полноценных понятий, «которые на целый период умственного развития опережали остальное содержание сознания» (Гальперин, Эльконин, 2001, с. 311).

Авторская программа по математике Я.И. Абрамсона, о которой далее пойдет речь, строится преимущественно на принципах третьего типа учения, опирающегося на познавательный интерес, который, как отмечал П.Я. Гальперин, *требует* исключения других видов мотивации. Интересно заметить, что на необходимость построения обучения математике на «чистой любознательности» (Ответы..., 2001, с. 190) обращал внимание и А.Н. Колмогоров, поскольку «математика может быть интересна всем и полезна всюду» (Ответы..., 2001, с. 190).

При этом следует заметить, что даже беглого знакомства с авторской программой по математике достаточно, чтобы заметить в ней элементы первого и второго типов учения. Это может быть связано с особенностями детей, которые учились в школе «Интеллектуал»: программа была рассчитана на одаренных учеников, в то время как в одном классе зачастую оказываются дети различного уровня умственного развития и с различной подготовкой к школьному обучению.

**Практическими основаниями** программы явились разработанные Я.И. Абрамсоном учебно-методические требования, учет которых обеспечивал как мотивационную готовность к познанию нового, так и высокую интеллектуальную активность на уроках.

Во-первых, быстрый темп учебных занятий, проявляющийся в частой смене заданий и их низкой повторяемости — поиск нестандартного, нового для ребенка решения предупреждает появление утомления.

Во-вторых, постепенная отработка действий за счет их включения во все последующие виды заданий, например, без окончательной отработки сложения столбиком дети переходят к усвоению действия умножения, которое предполагает обращение к действию сложения.

В-третьих, обучение детей, уровень умственного развития которых выше по сравнению с уровнем развития их сверстников, создает условия для успешных выступлений детей на олимпиадах, а это способствует повышению мотивации учителя; и таким образом обеспечивается успешная деятельность всех участников образовательного процесса — и ученика, и педагога.

В-четвертых, непрерывность занятий — домашние задания даются в том числе на каникулы, что, с одной стороны, обеспечи-

ваит интеллектуальную выносливость, а с другой — формирует ненасыщаемую интеллектуальную потребность: детям нравится решать трудные задачи. Домашнее задание на лето отличается от всех остальных своим объемом — оно примерно в 10 раз больше обычного, рассчитанного на недельные каникулы в течение учебного года. Кроме того, его содержание выходит за рамки усвоенного ранее материала — в него добавляются новые сведения, которые школьник должен освоить самостоятельно. Все летние задания разбираются впоследствии в классе, и авторами решений выступают сами ученики, которые с большим удовольствием делятся вариантами решений с одноклассниками.

В-пятых, предъявление общей схемы анализа условий задачи сопровождается недостаточностью объяснений, что побуждает к интеллектуальным «мучениям» и сохраняет творческий подход детей к занятиям, не позволяющий ограничиваться решением «по образцу».

В-шестых, признание права ребенка на ошибку, которая выступает лишь поводом для последующего совместного обсуждения и анализа, что не ослабляет интерес ребенка к задаче. Данное положение согласуется с представлением П.Я. Гальперина о том, что неудачи должны не обескураживать ребенка, а побуждать его к поискам новых нестандартных решений.

### **Экспериментальная программа обучения математике сквозь призму теории П.Я. Гальперина**

На основании представленного выше материала можно выделить важные в психологическом и педагогическом отношении аспекты авторской программы по математике.

Прежде всего, нужно сказать об актуальности проблемы содержания и методов школьного обучения — как начального, так и среднего, что находит отражение в ее активном обсуждении на страницах периодических изданий, на съездах и конференциях учителей, а также в появлении разнообразных курсов повышения квалификации педагогов.

#### ***Кого учить?***

Данная программа изначально была апробирована на детях, которые посещали частную школу «Алеф». Класс состоял из 8–10 учеников, среди которых, как правило, 1–2 отличались довольно высоким (выше среднего) уровнем умственного развития, а 2–3 имели нарушения развития различной степени выраженности. Программу



по математике усваивали 75–80% детей, правда, она отличалась меньшей насыщенностью по сравнению с той, которая представлена выше.

Впоследствии с опорой на эту экспериментальную программу было построено обучение математике в школе «Интеллектуал», которое предполагало конкурсный отбор. Зачисление в школу происходило по результатам собеседований, во время которых детям предлагалось решить ряд задач. При этом основное внимание обращалось не столько на то, решает ли ребенок задачу (задачи отличались повышенной трудностью), сколько на то, как долго он способен ее решать, не прибегая к помощи взрослых. Автор программы писал: «Главное, чтобы была способность фокусироваться на задаче, фиксировать свое внимание в течение длительного времени» (Абрамсон, 2012, с. 11). Интересно заметить, что похожую позицию занимает автор учебников по математике для начальной школы Л.Г. Петерсон, которая разрабатывала курс школьной математики, отвечающий требованиям развивающего обучения. По ее мнению, «наибольшие трудности в начальной школе испытывают не те дети, которые не получили тот или иной объем знаний, а те, которые проявляют интеллектуальную пассивность, у кого отсутствуют желание и привычка думать, стремление узнать что-то новое» (Петерсон, 1998, с. 51). Попутно заметим, что явление интеллектуальной пассивности изучалось Л.С. Славиной в лаборатории Л.И. Божович (ученица Л.С. Выготского, и, как и П.Я. Гальперин, в своих исследованиях опиралась на представления своего учителя о закономерностях психического развития ребенка).

Еще одним важным критерием выступило наличие у ребенка умения слушать как педагога, так и одноклассника, не отвлекаясь при этом на не имеющие отношения к задаче вопросы.

Также учитывались сообразительность, скорость реакции, которые проявляются при решении «задач на смекалку».

Однако нужно специально заметить, что эта программа, по мнению ее автора, пригодна для обучения всех детей, другое дело, что обучение в этом случае будет происходить в ином, более медленном темпе. Это впоследствии получило практическое подтверждение.

### ***Зачем учить?***

Автор программы Я.И. Абрамсон поставил перед собой задачу: показать детям «настоящую математику, похожую на ту, которой им придется заниматься, если они решат выбрать ее в качестве своей профессии, и чтобы выбор этот они осуществляли осознанно» (Абрамсон, 2012, с. 6). Эта задача была «выстрадана» годами соб-

ственного обучения в математической школе, по итогам которого у автора сложилось предвзятое отношение к этому предмету как совокупности олимпиадных задач. Таким образом, целью обучения выступило «привить детям любовь к математике, сформировать понимание этой дисциплины, развить “математическое” мышление» (Абрамсон, 2012, с. 7). Поставленная таким образом задача направляла авторский поиск не только при отборе содержания подлежащего усвоению материала, но и способов его последовательного усвоения.

### ***Как учить?***

Поставленная задача предполагала формирование у детей умения самостоятельно выводить правила и теоремы, а не работать по заранее заданному алгоритму.

Именно такой подход и был реализован в исследованиях, выполненных под руководством П.Я. Гальперина. Как было сказано выше, программа по математике построена с учетом требований третьего типа учения, а потому в ней нашли отражение следующие его особенности:

- наличие познавательной мотивации до начала школьного обучения и постоянное ее поддержание в процессе изучения математики; кроме того, исключалось негативное отношение к учебному предмету за счет получения звездочек за правильное решение, при этом ошибочный ответ лишь признавался таковым без каких-либо последующих санкций;
- создание полной и обобщенной ориентировки, обеспечивающей правильное выполнение действия, но при этом предполагающей творческое отношение младших школьников к новым для них заданиям; наглядной иллюстрацией сказанного выступает самостоятельное выведение ими доказательств и правил; запоминание математических сведений выступало при этом закономерным итогом, но ни в коем случае не целью такого обучения;
- постепенный перевод ориентировочной части действия в умственный план за счет обязательного проговаривания выполняемых операций;
- забота о воспитании действия с заданными свойствами, в частности, специальное внимание уделено такому его свойству, как осознанность.

### **Чему учить?**

Главный вопрос, который, по собственному признанию автора программы, перед ним встал: направить усилия на овладение задачами повышенной трудности или заботиться об усвоении общих понятий и показывать связи между различными задачами? Есть все основания говорить о том, что, отдав предпочтение овладению системой математических понятий с самых ранних этапов обучения, автор невольно добился того, что дети оказались весьма успешными при решении сложных нестандартных задач. Причем речь идет именно о математике как самостоятельной и целостной области научного знания, в отличие от принятого в настоящее время в школьном обучении деления на алгебру и геометрию.

Содержание программы представлено в устных и письменных выступлениях автора, преимущественно методического характера, и рассчитанных на учителей математики. Нужно заметить, что ознакомление с программой требует от читателя достаточно высокой математической грамотности, потому как изменения касались не только содержания привычных для педагогов начальной школы тем, но и порядка их прохождения; кроме того, вводились новые темы, ранее не входящие в учебную программу. Иначе говоря, работа по данной программе не может быть сведена лишь к изменению некоторых методических приемов, требуется иное, в отличие от традиционной программы, введение детей в содержание математики. В силу этого весьма перспективным представляется совместное с учителями начальной школы обсуждение результатов внедрения программы в практику обучения.

### **Заключение**

По мнению Я.И. Абрамсона, построенные таким образом уроки математики убедительно показали, что дети с удовольствием занимаются по этой программе, в полном объеме усваивают материал, который в значительной степени превышает материал традиционной школы, что говорит в пользу выросших возрастных возможностей детей. Заслуживает внимания и высокая оценка данной программы обучения родителями: они обращают внимание не только на положительное отношение детей к процессу учебы, но и отсутствие у них утомления от школьных занятий.

В ходе экспериментального обучения математике удалось показать, что широко распространенное мнение о возрастных

ограничениях учеников начальной школы является ошибочным. В частности, уже первоклассники в результате определенным образом организованного обучения оказываются в состоянии использовать системы счисления, отличные от десятичной, осуществлять операции возведения в степень, извлечения корня и взятия логарифма, осваивать основные геометрические понятия (теорема, аксиома, методы доказательства и др.).

В течение всего периода обучения наблюдался устойчивый интерес к предмету — это проявлялось в том, что дети продолжали решать задачи на перемене, просили увеличить домашние задания. По мнению Я.И. Абрамсона, быстрый темп, относительно высокая трудность заданий при их низкой повторяемости способствуют поддержанию познавательной мотивации в целом и по отношению к математике в частности.

Кроме того, Я.И. Абрамсон считает, что новая программа обучения, предполагающая изменение порядка и содержания материала, позволит существенно разгрузить программу средней и старшей школы и даже пройти в школе курс высшей математики в объеме первых двух курсов математических факультетов университетов.

Также нужно сказать и о позитивном эффекте обучения для работающего по этой программе учителя: «Происходит то, что в идеале и должно происходить на уроках: эмоциональный накал, высокое интеллектуальное напряжение, передаваемое в обоих направлениях: от учителя к детям, от детей к учителю» (Абрамсон, Березкина, 2013, с. 4).

Как было показано нами ранее, «главный теоретический вывод касается подтверждения известного положения о зависимости результатов обучения от его содержания и методов, в частности, удалось лишним раз показать, насколько эффективным является построенное по третьему типу обучение (Степанова, 2015, с. 78). Также получил еще одно подтверждение тезис П.Я. Гальперина о связи интеллектуальных возможностей детей и типов учения, об ошибочности рассмотрения возможностей в отрыве от типа учения. А в целом нельзя не признать пророческими слова Л.Ф. Обухова: «...работы П.Я. Гальперина отмечены историческим значением, и психология раньше или позже будет развиваться по пути, намеченному им» (Обухова, 2014, с. 74; курсив наш. — М.С.).

Специального внимания заслуживает вопрос о возрасте, с которого можно заниматься углубленным изучением математики. В этой связи предметом специального исследования может выступить сравнительный анализ результатов проведенного экспериментального

обучения математике и данных о возрастной одаренности, полученных Н.С. Лейтесом. Полученные в психологии данные о наличии возрастной чувствительности, избирательности внимания к определенным воздействиям позволили Н.С. Лейтесу (Лейтес, 2000) сделать вывод о зависимости незаурядных умственных способностей от специфических возможностей детства. П.Я. Гальперин, затрагивая проблему способностей, писал: «Отрицает ли такое планомерное формирование умственной деятельности наличие способностей и различия в способностях? Нет, конечно. Оно отрицает не существование и различие способностей, а злоупотребление понятием способностей для оправдания педагогического брака и третьесортной педагогической продукции» (Гальперин, 1960, с. 144). Однако «по отношению к общеобразовательной программе вы можете получить выравнивание успеваемости... Здесь другой подход к массовому обучению, через иную методику преподавания» (Гальперин, 2002, с. 218). В свете поднятой проблемы нужно заметить, что вопрос развития математических способностей детей, обучающихся по разным программам, получил отражение в упомянутом выше исследовании (Сиднева и др., 2022).

Возвращаясь к авторской программе Я.И. Абрамсона, нельзя не сказать о стремлении автора программы развивать творческие способности детей. А это недвусмысленно свидетельствует в пользу возможности организации обучения, имеющего своим результатом формирование творческого математического мышления. Мы обращаем на это специальное внимание, потому как П.Я. Гальперину были хорошо известны возражения оппонентов — о чем он говорил еще в докторской диссертации (Гальперин, 1965), одно из которых сводилось к тому, что третий тип учения исключает творчество ученика. Приводимые П.Я. Гальпериним доводы в пользу того, что при третьем типе имеет место творческое исследование новой задачи, получили в данном случае свое наглядное практическое подтверждение.

Результаты экспериментального обучения математике позволили автору программы сделать вывод: «...именно период, приходящийся на начальную школу, 7–11 лет, является наиболее продуктивным с точки зрения возможностей формирования так называемого “математического мышления”, сохранения и выявления математических способностей, присутствующих у гораздо большего числа детей, чем это принято считать, и гораздо большего, чем мы видим на рубеже 5-го класса» (Абрамсон, 2012а, с. 41).

Вместе с тем не стоит закрывать глаза на обнаружившие себя трудности реализации данной учебной программы. По меньшей мере недальновидно с практической точки зрения не замечать тех проблем, которые будут тормозить ее дальнейшее продвижение. К обнаруженным нами трудностям в первую очередь следует отнести следующие:

- едва ли не главная проблема связана с подготовкой педагогов: на данный момент передача опыта преподавания происходит «лицо в лицо», что, с одной стороны, позволяет получить адекватное представление о методике обучения, но, с другой — в значительной степени осложняет ее применение; закономерным итогом такого положения дел является невозможность дальнейшего ее распространения;
- нерешенным является вопрос об организации обучения по этой программе в массовой школе;

открытым остается вопрос о преподавании других учебных предметов, равно как и о соотношении этой программы с другими программами по математике не только в начальной, но и средней и старшей школе;

- непонятно, как быть с неуспевающими детьми: если программа массовой школы рассчитана на всех без исключения детей с нормальным ходом развития, то как следует поступить в случае недостаточного усвоения данной программы — целесообразно ли продолжать обучение; особую остроту данная проблема приобретает в нынешних условиях распространения инклюзивного образования.

В заключение нужно заметить, что на современном этапе эта программа носит экспериментальный характер и необходимо время, прежде чем делать выводы относительно ее эффективности, но несомненно одно: без ее апробации для этого нет и не может быть достаточных оснований. Поэтому цель данной публикации довольно скромная: привлечение внимания психологов и педагогов, теоретиков и практиков к одной из авторских программ по математике для начальной школы. Обсуждение данной программы своим итогом будет иметь лучшее осознание содержания и методов преподавания математики в современной школе. Перспективным является рассмотрение преемственности между содержанием курса математики в средней и высшей школе.

Кроме того, мы лишний раз получаем подтверждение истинности положения П.Я. Гальперина о необходимости выделения учебного предмета с самых первых шагов его изучения: «...как раз на первых подступах к науке, при первом знакомстве и даже первых встречах с нею четкое выделение ее предмета особенно важно и составляет

незаметное, но незаменяемое условие ее дальнейшего изучения» (Гальперин, 2023, с. 555). Общее заключение касается утверждения значимости и значительности теории П.Я. Гальперина для нынешней и будущей образовательной практики (Степанова, 2023).

Также самостоятельный интерес представляет обращение к полученным Я.И. Абрамсоном результатам не только с психологических, но и педагогических позиций. Выдающийся отечественный математик А.Н. Колмогоров, известный в том числе и работами в области преподавания математики школьникам, отмечал: «...как практик, я склонен думать, что характер математического развития, достигаемого по самым современным рецептам ранних занятий теорией множеств и алгеброй, до 10–12 лет с довольно хорошим успехом заменим общим воспитанием сообразительности и умственной активности. Но запоздание с усвоением строгой логики и специальных математических навыков в 14–16 лет делается уже трудно восполнимым» (Колмогоров, 2001, с. 106). Сравнение авторских подходов — предмет будущих исследований.

### Список литературы

Абрамсон, Я.И. (1993). К вопросу о формировании математического мышления у младших школьников. *Вестник Московского университета. Серия 14. Психология*, (1), 39–46.

Абрамсон, Я.И. (2012). Математика. 1 класс: Книга для учителя. Санкт-Петербург: Политехника-сервис.

Абрамсон, Я.И. (2012а). Поэтапное формирование математических понятий в начальной школе. В: Новые образовательные программы МГУ и школьное образование: Материалы второй научно-практической конференции. Москва: МГУ имени М.В. Ломоносова, (1), 41–42.

Абрамсон, Я.И., (2014). Авторская программа по математике для высокомотивированных школьников. Материалы открытой школы-семинара для учителей математики в сборнике «Учим математике-4», Москва.

Абрамсон, Я.И. (2015). Математика. 2 класс: Книга для учителя. Санкт-Петербург: Политехника-сервис.

Абрамсон, Я.И. (2015а). Экспериментальное обучение математике в начальной школе. *Вопросы психологии*, (1), 58–68.

Абрамсон, Я.И. (2018). Математика. 3 класс: Книга для учителя. Санкт-Петербург: Политехника-сервис.

Абрамсон, Я.И., Березкина, С.Г. (2013). Уроки математики в первом классе. Санкт-Петербург: Политехника-сервис.

Асмолов, А.Г. (2012). Оптика просвещения: социокультурные перспективы. Москва: Просвещение.



Буткин, Г.А. (1968). Формирование умений, лежащих в основе геометрического доказательства. В: Зависимость обучения от типа ориентировочной деятельности. Под ред. П.Я. Гальперина, Н.Ф. Талызиной. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 187–237.

Волович, М.Б. (1967). Формирование общих приемов работы с понятиями (на материале начальных понятий геометрии). Автореф. дис. канд. пед. наук. Москва.

Выготский, Л.С. (1982). Мышление и речь. В: Выготский Л.С. Собр. Соч.: в 6 т. Москва: Педагогика, (2), с. 5–361.

Выготский, Л.С. (1984). Проблема возраста. В: Выготский Л.С. Собр. Соч.: в 6 т. Москва: Педагогика, (4), 244–268.

Выготский, Л.С. (1991). Педагогическая психология. Москва: Педагогика.

Выготский, Л.С. (2001). Лекции по педологии. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет».

Гальперин, П.Я. (1960). Несколько разъяснений к гипотезе умственных действий. *Вопросы психологии*, (4), 141–148.

Гальперин, П.Я. (1965). Основные результаты исследований по проблеме «формирование умственных действий и понятий». Доклад, обобщающий исследования П.Я. Гальперина, представленный на соискание ученой степени доктора педагогических наук (по психологии) по совокупности работ, представленных на тему этого доклада. Москва: Изд-во Моск. ун-та.

Гальперин, П.Я. (1985). Методы обучения и умственное развитие ребенка. Москва: Изд-во Моск. ун-та.

Гальперин, П.Я. (1998). Психология как объективная наука. Под ред. А.И. Подольского. Москва: Изд-во «Институт практической психологии», Воронеж: НПО «МОДЭК».

Гальперин, П.Я. (2002). Лекции по психологии. Москва: Книжный дом «Университет»: Высшая школа.

Гальперин, П.Я. (2023). Психология: предмет и метод. Избранные психологические труды. Москва: Изд-во Моск. ун-та.

Гальперин, П.Я., Георгиев, Л.С. (1960). К вопросу о формировании начальных математических понятий. Сообщение I — IV. *Доклады АПН РСФСР*, (1), 31–36; (3), 37–42; (4), 49–52; (5), 41–44.

Гальперин, П.Я., Талызина, Н.Ф. (1957). О формировании начальных геометрических понятий на основе организованного действия учащихся. *Вопросы психологии*, (1), 28–44.

Гальперин, П.Я., Талызина, Н.Ф. (1979). Современное состояние теории поэтапного формирования умственных действия. *Вестник Московского университета. Серия 14. Психология*, (4), 54–63.

Гальперин, П.Я., Эльконин, Д.Б. (2001). К анализу теории Ж. Пиаже о развитии детского мышления. В: Жан Пиаже: теория, эксперименты, дискуссии: Сб. статей. Сост. и общ ред. Л.Ф. Обуховой и Г.В. Бурменской. Москва: Гардарики, 296–324.

Георгиев, Л.С. (1960). Формирование начальных математических понятий у детей. Автореф. дис. канд. пед. наук (по психологии). Москва.

Губарев, В. (2000). Академик В.И. Арнольд: Путешествие в хаосе. Наука и жизнь, (12), 2–10.

Давыдов, В.В. (1958). Образование начального понятия о количестве у детей (к вопросу о психологических механизмах понятий, возникающих при формировании умственных действий). Автореф. дис. канд. пед. наук (по психологии). Москва.

Давыдов, В.В. (1966). Логико-психологические проблемы начальной математики как учебного предмета. В: Возрастные возможности усвоения знаний (младшие классы школы). Под ред. Д.Б. Эльконина и В.В. Давыдова. Москва: Просвещение, 54–104.

Давыдов, В.В. (Ред.) (1969). Психологические возможности младших школьников в усвоении математики. Москва: Просвещение.

Зинченко, В.П. (2002). П.Я. Гальперин: от действия с заданными свойствами к свободной мысли. *Вопросы психологии*, (5), 120–134.

Колмогоров, А.Н. (1973). О профессии математика. Квант, (4), 12–18.

Колмогоров, А.Н. О развитии математических способностей (письмо В.А. Крутецкому). (2001). *Вопросы психологии*, (3), 101–106.

Лейтес, Н.С. (2000). Возрастная одаренность школьников. Москва: Издат. центр «Академия».

Леонтьев, А.Н. (2009). Психологические основы развития ребенка и обучения. Под ред. Д.А. Леонтьева, А.А. Леонтьева. Москва: Смысл.

Обухова, Л.Ф. (2014). П.Я. Гальперин среди современников. *Вопросы психологии*, (2), 65–75.

Ответы А.Н. Колмогорова на вопросы анкеты. (2001). *Вопросы психологии*, (3), 101–102.

Подольский, А.И. (2002). Психологическая система П.Я. Гальперина. *Вопросы психологии*, (5), 14–28.

Подольский, А.И. (2023). Психологическая система П.Я. Гальперина (вступительная статья). В: Гальперин П.Я. Психология: предмет и метод. Избранные психологические труды. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 13–32.

Петерсон, Л.Г. (1998). Первые уроки по учебнику «Математика». *Начальная школа: плюс — минус*, (1), 51–58.

Салмина, Н.Г. (1968). Об изучении чисел действий с ними в начальной школе. В: Формирование и умений на основе теории поэтапного усвоения умственных действий. Под ред. П.Я. Гальперина и Н.Ф. Талызиной. Москва: Изд-во Моск. унта, 72–116.

Салмина, Н.Г. (2012). Программа формирования начальных математических понятий и опыт ее реализации в практике обучения. *Вестник Московского университета. Серия 14. Психология*, (4), 101–112.

Салмина, Н.Г., Сохина В.П. (1968). Проблема научного подхода к первоначальному изучению математики. В: Психологические исследования. Под ред. А.Н. Леонтьева и др. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 137–144.

Сиднева, А.Н. (2022). Сравнительный анализ программ обучения математике в начальной школе с позиций культурно-исторического и деятельностного подходов. *Культурно-историческая психология*, (1), 69–78.

Сиднева, А.Н., Асланова, М.С., Бухаленкова, Д.А. (2022). Особенности развития математических способностей первоклассников, обучающихся по разным образовательным программам. *Вестник Московского университета. Серия 14. Психология*, (3), 119–144.

Сохина, В.П. (1968). Психологические основы формирования начальных математических понятий. В: Формирование и умений на основе теории поэтапного усвоения умственных действий. Под ред. П.Я. Гальперина и Н.Ф. Талызиной. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 117–134.

Степанова, М.А. (2015). Возрастные возможности усвоения математических понятий (На материале начальной школы). *Вопросы психологии*, (1), 69–82.

Степанова, М.А. (2017). Психолог, медик, философ: вехи научной биографии П.Я. Гальперина. *Национальный психологический журнал*, (3), 21–32.

Степанова, М.А. (2023). Практическая психология образования сквозь призму психотехнического подхода: школа П.Я. Гальперина. Москва: Изд-во Моск. ун-та.

Талызина, Н.Ф. (1955). К вопросу об усвоении начальных геометрических понятий. Тезисы докладов на совещании по психологии. 1–6 июля 1955г. Москва: АПН РСФСР, 98–100.

Талызина, Н.Ф. (1988). Формирование познавательной деятельности школьников. Москва: Просвещение.

Талызина, Н.Ф. (1992). Пути использования теории планомерного формирования умственных действий в практике образования. *Вестник Московского университета. Серия 14. Психология*, (4), 18–26.

Талызина, Н.Ф. (Ред.). (1995). Формирование приемов математического мышления. Москва: Вентана-Граф.

Талызина, Н.Ф. (1998). Педагогическая психология. Москва: Академия.

Фейгенберг, И.М. (2008). Учимся всю жизнь. Москва: Смысл.

## References

Abramson, Ya.I. (1993). On the issue of developing mathematical thinking in younger schoolchildren. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 14. Psihologiya (Moscow University Psychology Bulletin)*, (1), 39–46. (In Russ.).

Abramson, Ya.I. (2012). Mathematics. 1st grade: Book for teachers. Saint-Petersburg: Politekhnik-service. (In Russ.).

Abramson, Ya.I. (2012a). Stage-by-stage formation of mathematical concepts in elementary school. In: New educational programs of Moscow State University and school education: Materials of the second scientific and practical conference. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press, (1), 41–42. (In Russ.).

Abramson, Ya.I. (2014). Author's mathematics program for highly motivated schoolchildren. Materials of the open school-seminar for mathematics teachers in the collection "Teaching Mathematics-4", Moscow. (In Russ.).

Abramson, Ya.I. (2015). Mathematics. 2nd grade: Book for teachers. Saint-Petersburg: Politekhniko-service. (In Russ.).

Abramson, Ya.I. (2015a). Experimental teaching of mathematics in primary school. *Voprosy psikhologii*, (1), 58-68. (In Russ.).

Abramson, Ya.I. (2018). Mathematics. Grade 3: Teacher's Book. Saint-Petersburg: Politekhniko-service. (In Russ.).

Abramson, Ya.I., Berezkina, A.G. (2013). Math lessons in first grade. Saint-Petersburg: Politekhniko-service. (In Russ.).

Answers by A.N. Kolmogorov to the questions of the questionnaire. (2001). *Voprosy psikhologii*, (3), 101–102. (In Russ.).

Asmolov, A.G. (2012). Optics of education: sociocultural perspectives. Moscow: Enlightenment. (In Russ.).

A.N. Kolmogorov — on the development of mathematical abilities (letter to V.A. Krutetsky). (2001). *Voprosy psikhologii*, (3), 101–106. (In Russ.).

Butkin, G.A. (1968). Formation of skills underlying geometric proof. In: P.Ya. Gal'perin, N.F. Talyzina (Eds). Dependence of learning on the type of orientation activity. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press, 187–237. (In Russ.).

Davydov, V.V. (1958). Obrazovanie nachal'nogo ponyatiya o kolichestve u detei (k voprosu o psikhologicheskikh mekhanizmax ponyatii, vznikayushchikh pri formirovaniy umstvennykh deistvii). Avtoref. dis. kand. pedagog. nauk (po psikhologii). (Formation of the initial concept of quantity in children (to the question of the psychological mechanisms of concepts that arise during the formation of mental actions).). Abstract Cand. Sci. dis. ped. (Psychology), Moscow. (In Russ.).

Davydov, V.V. (1966). Logical and psychological problems of primary mathematics as an academic subject. In: D.B. El'konin, V.V. Davydov (Eds). Age-related opportunities for acquiring knowledge (junior grades of school). Moscow: Enlightenment, 54–104. (In Russ.).

Davydov, V.V. (Ed.) (1969). Psychological capabilities of younger schoolchildren in mastering mathematics. Moscow: Enlightenment.

Feigenberg, I.M. (2008). We learn all our lives. Moscow: Smysl. (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya. (1960). A few clarifications on the mental action hypothesis. *Voprosy psikhologii*, (4), 141–148. (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya. (1965). The main results of research on the problem of "formation of mental actions and concepts." A report summarizing the research. In: P.Ya. Galperin, submitted for the degree of Doctor of Pedagogical Sciences (in psychology) based on the totality of works presented on the topic of this report. Moscow: Lomonosov Moscow State University. (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya. (1985). Teaching methods and mental development of the child. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press. (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya. (1998). Psychology as an objective science. Ed. A.I. Podolsky. Moscow: Publishing house "Institute of Practical Psychology", Voronezh: NPO "MODEK". (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya. (2002). Lectures on psychology. Moscow: Book House "University": Higher School. (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya. (2023). Psychology: subject and method. Selected psychological works. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press. (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya., Georgiev, L.S. (1960). On the issue of the formation of initial mathematical concepts. Message I — IV. *Doclady Akademii pedagogicheskikh nauk (Reports of the Academy of Pedagogical Sciences)*, (1), 31–36; (3), 37–42; (4), 49–52; (5), 41–44. (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya., Talyzina N.F. (1957). On the formation of initial geometric concepts based on the organized actions of students. *Voprosy psikhologii*, (1), 28–44. (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya., Talyzina N.F. (1979). The current state of the theory of the gradual formation of mental actions. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 14. Psihologiya (Moscow University Psychology Bulletin)*, (4), 54–63. (In Russ.).

Gal'perin, P.Ya., El'konin, D.B. (2001). To the analysis of J. Piaget's theory of the development of children's thinking. In: L.F. Obukhova, G.V. Burmenskaia (Eds). *Jean Piaget: theory, experiments, discussions*. Moscow: Gardariki, 296–324. (In Russ.).

Georgiev, L.S. (1960). Formirovanie nachal'nykh matematicheskikh ponyatii u detei: Avtoref. dis. kand. pedagog. nauk (po psikhologii). (Formation of initial mathematical concepts in children). Abstract Cand. Sci. dis. ped. (Psychology), Moscow. (In Russ.).

Gubarev, V. (2000). Academician V.I. Arnold: Journey in chaos. *Nauka i Zhizn' (Science and Life)*, (12), 2–10. (In Russ.).

Kolmogorov, A.N. (1973). About the profession of mathematics. *Kvant (Quantum)*, (4), 12–18. (In Russ.).

Leites, N.S. (2000). Age-related talent of schoolchildren. Moscow: Publishing house Center "Academy" (In Russ.).

Leont'ev, A.N. (2009). Psychological foundations of child development and learning. D.A. Leont'ev, A.A. Leont'ev (Eds). Moscow: Smysl. (In Russ.).

Obukhova, L.F. (2014). P.Ya. Galperin among his contemporaries. *Voprosy psikhologii*, (2), 65–75. (In Russ.).

Podol'skii, A.I. (2002). Psychological system P.Ya. Galperin. *Voprosy psikhologii*, (5), 14–28. (In Russ.).

Podol'skii, A.I. (2023). Psychological system P.Ya. Galperin (introductory article). In: Galperin P.Ya. Psychology: subject and method. Selected psychological works. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press, 13–32. (In Russ.).

Peterson, L.G. (1998). First lessons from the textbook "Mathematics". *Nachal'naya Shkola: Plyus — Minus. (Primary School: Plus — Minus)*, (1), 51–58. (In Russ.).

Salmina, N.G. (1968). About learning numbers of actions with them in elementary school. In: P.Ya. Gal'perin, N.F. Talyzina (Eds). Dependence of learning on the type of orientation activity. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press, 72–116. (In Russ.).

Salmina, N.G. (2012). The program for the formation of initial mathematical concepts and the experience of its implementation in teaching practice. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 14. Psihologiya (Moscow University Psychology Bulletin)*, (4), 101–112. (In Russ.).

Salmina, N.G., Sokhina, V.P. (1968). The problem of a scientific approach to the initial study of mathematics. In: A.N. Leont'ev and others (Eds). *Psychological Research*. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press, 137–144. (In Russ.).

Sidneva, A.N. (2022). Comparative analysis of mathematics teaching programs in primary school from the perspective of cultural-historical and activity-based approaches. *Kul'turno-Istoricheskaya Psikhologiya (Cultural-Historical Psychology)*, (1), 69–78. (In Russ.).

Sidneva, A.N., Aslanova, M.S., Bukhalenkova, D.A. (2022). Features of the development of mathematical abilities of first-graders studying in different educational programs. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 14. Psihologiya (Moscow University Psychology Bulletin)*, (3), 119–144. (In Russ.).

Sokhina, V.P. (1968). Psychological foundations of the formation of initial mathematical concepts. In: P.Ya. Gal'perin, N.F. Talyzina (Eds). *Dependence of learning on the type of orientation activity*. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press, 117–134. (In Russ.).

Stepanova, M.A. (2015). Age-related opportunities for mastering mathematical concepts (Based on the material of elementary school). *Voprosy psikhologii*, (1), 69–82.

Stepanova, M.A. (2017). Psychologist, physician, philosopher: milestones in the scientific biography of P.Ya. Galperin. *National Psychological Journal*, 3(27) 21–32. (In Russ.).

Stepanova, M.A. (2023). Practical educational psychology through the prism of the psychotechnical approach: the school of P.Ya. Galperin. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press. (In Russ).

Talyzina, N.F. (1955). On the issue of mastering initial geometric concepts. In: *Abstracts of reports at a meeting on psychology*. July 1–6, 1955 Moscow: Academy of Pedagogical Sciences, 98–100. (In Russ.).

Talyzina, N.F. (1988). *Formation of cognitive activity of schoolchildren*. Moscow: Enlightenment. (In Russ.).

Talyzina, N.F. (1992). Ways to use the theory of systematic formation of mental actions in educational practice. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 14. Psihologiya (Moscow University Psychology Bulletin)*, (4), 18–26. (In Russ.).

Talyzina, N.F. (Ed.). (1995). *Formation of methods of mathematical thinking*. Moscow: Ventana-Graf.

Talyzina, N.F. (1998). *Pedagogical psychology*. Moscow: Academy. (In Russ.).

Volovich, M.B. (1967). *Formirovanie obshchih priemov raboty s ponyatiyami (na materiale nachal'nyh ponyatij geometrii: Avtoref. dis. kand. pedag. nauk (po psikhologii))*. (Formation of general techniques for working with concepts (based on the initial concepts of geometry). Abstract Cand. Sci. dis. ped. (Psychology), Moscow. (In Russ.).

Vygotskii, L.S. (1982). *Thinking and Speech* (1982). In: Vygotsky L.S. *Collection Works: in 6 volumes*. Moscow: Pedagogy, (2), 5–361. (In Russ.).

Vygotskii, L.S. (1984). The problem of age. In: Vygotsky L.S. Collection Works: in 6 volumes. Moscow: Pedagogy, (4), 244–268. (In Russ.).

Vygotskii, L.S. (1991). Pedagogical psychology. Moscow: Pedagogy. (In Russ.).

Vygotskii, L.S. (2001). Lectures on pedagogy. Izhevsk: Udmurt University Publishing House. (In Russ.).

Zinchenko, V.P. (2002). P.Ya. Galperin: from action with given properties to free thought. *Voprosy psikhologii*, (5), 120–134.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

**Марина Анатольевна Степанова**, доктор психологических наук, доцент факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова, ведущий научный сотрудник Федерального научного центра психологических и междисциплинарных исследований, Москва, Российская Федерация, Marina.stepanova@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2308-058X>

## ABOUT THE AUTHOR

**Marina A. Stepanova**, Dr. Sci. (Psychology), Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Leading Researcher at the Federal Scientific Center for Psychological and Interdisciplinary Research, Moscow, Russian Federation, Marina.stepanova@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2308-058X>

Поступила: 16.01.2024; получена после доработки: 04.02.2024; принята в печать: 13.02.2024

Received: 16.01.2024; revised: 04.02.2024; accepted: 13.02.2024