Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование. 2024. Т. 22, № 2. С. 61–82
Lomonosov Pedagogical Education Journal. 2024. Vol. 22, № 2. P. 61–82

Научная статья / Research Article
https://doi.org/10.55959/ LPEJ-24-16
УДК/UDC 372.851, 37.013.46

О содержании школьного математического образования. От содержимого к содержанию: математика как система мыслительных средств

А.В. Боровских ✉

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

✉ bor.bor@mail.ru

Резюме
Актуальность. Необходимость в реконструкции (а не просто модификации, как это делалось ранее) школьного математического образования, обусловленная интенсивным развитием информационных технологий, требует восстановления оснований, исходя из которых это образование строится. Обсуждение вопросов о том, какую тему включить или исключить из курса математики на основании аргументов вроде «невозможно быть образованным человеком, не зная…» или «дети и так ничего не понимают в…» явно не имеет шансов на продуктивные решения.
Цель. В настоящей работе вводится система понятий и различений, дающая возможные основания для содержательного конструирования школьного курса математики.
Методы. Проблематизация (переход от проблемной ситуации к формулировке проблемы), методологический анализ проблемы, введение понятийных различений, построение системы отношений между понятиями.
Результаты. Введено различение содержимого и содержания математического образования — и как процесса, и как результата. Показано, что функционально (содержательно) математика существует в культуре как система мыслительных средств, необходимых для того, чтобы представлять отношения между мыслимыми сущностями в той или иной науке или сфере деятельности. Соответственно, содержанием процесса математического образования является освоение этих мыслительных средств и способов их

использования, а содержанием математического образования как результата становится владение этим мыслительными средствами и способами для представления отношений между сущностями той или иной природы. **Выводы.** Показано, что математика функционально выступает как система мыслительных средств и поэтому конструирование школьного математического образования должно осуществляться именно в логике освоения мыслительных средств, а не «тем», «объектов», «задач», «навыков», «знаний» и пр. В последующих работах развитая система представлений будет применена для задания, с одной стороны, темпо-ритмической структуры образовательного процесса, а с другой — для логического обоснования начальной части математического образования (арифметики) как процесса освоения математических мыслительных средств.

Ключевые слова: содержание школьного математического образования, категории формы, содержимого и содержания, мыслительные средства, знаковые и идеальные средства мышления, понятия, мыслительные операции и отношения, система, темпо-ритм, изменения и развитие

Для цитирования: Боровских, А.В. (2024). О содержании школьного математического образования. От содержимого к содержанию: математика как система мыслительных средств. *Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование, 22*(2), 61–82. https://doi.org/10.55959/LPEJ-24-16

On the Content of School Mathematics Education. From Contents to Content: Mathematics as a System of Mental Means

Aleksei V. Borovskikh ✉

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

✉ bor.bor@mail.ru

Abstract

Background. The need for reconstruction (and not modification, as it was previously done) of school mathematics education, due to the intensive development of information technology, requires the restoration of the foundations on which it is built. Discussions about what topic to include or exclude from a mathematics course based on arguments like "It is impossible to be an educated person without knowing..." on the one hand, or "Children cannot understand anything about..." on the other, clearly have no chance in obtaining productive solutions.

Objectives. This paper introduces a system of concepts and distinctions that provides the basis for solving the problem of constructing foundations for designing a school mathematics course.

Methods. The study involves problematization (transition from a problem situation to a problem formulation), methodological analysis of the problem, introduction of conceptual distinctions, construction of a system of relations between concepts.

Results. A distinction has been introduced between the content and contents of mathematical education — both as a process and as a result. It is shown that functionally (substantively) mathematics exists in culture as a system of mental means necessary to represent the relationships between conceivable entities in a particular science or field of activity. Accordingly, the content of the process of mathematical education is the mastery of these mental means and methods of applying them, and the content of mathematical education as a result is the possession of these mental means and methods for representing the relationships between entities of a particular nature.

Conclusions. It is shown that mathematics functionally acts as a system of mental means and therefore the design of school mathematical education should be carried out precisely in the logic of mastering mental means, and not "topics", "objects", "tasks", "skills", "knowledge", etc.

In the following papers a developed system of ideas will be used to specify, on the one hand, the tempo-rhythmic structure of the educational process, and on the other, to provide a logical justification for the initial part of mathematical education (arithmetic) as a process of mastering mathematical thinking tools.

Keywords: content of school mathematical education, form, content and contents, mental means, symbolic and ideal means of thinking, concepts, mental operations and relationships, system, tempo-rhythm, change and development

For citation: Borovskikh, A.V. (2024). On the Content of School Mathematics Education. From Contents to Content: Mathematics as a System of Mental Means. *Lomonosov Pedagogical Education Journal*, *22*(2), 61–82. https://doi.org/10.55959/LPEJ-24-16

Введение

Данная статья — первая из серии работ, которые представляют развернутое содержание доклада, сделанного на II Международном форуме «Градиент» для педагогов и исследователей в области математики, проходившем 25–27 января 2024 г. в МГПУ. Темой этого форума было «Развитие математического образования: от содержимого к содержанию».

Такое странное на первый взгляд противопоставление на самом деле очень важно. Разнообразные обсуждения «содержания школьной математики» оказываются совершенно бесполезными и для реальной педагогической деятельности, которую осуществляет учитель, и для организации математического образования в целом. Происходит это потому, что при ближайшем рассмотрении обнаруживается, что под «содержанием школьной математики» имеется в виду список тем в учебниках (Снегурова и др., 2018; Рослова и др., 2022; Беба, Гуреев, 2023; Богуславский, Садовников, 2023), иногда, впрочем, называемых «теориями» (Горбачев, 2011), или типы задач (Горев, Белова, 2016). Дискуссии о том, ввести или вывести «из содержания» теорию вероятностей, интегралы, котангенсы, таблицы вычитания или деления и пр., явно имеют отдаленное отношение к вопросу о том, что *должно быть* для того, чтобы выпускник школы был *образованным математически.* И что имеется в виду под вот этой «математической образованностью». И как именно эта «математическая образованность» появляется, за счет каких педагогических действий и на базе каких психических механизмов.

Метафорически выражаясь, содержание от содержимого отличается тем, что содержимое бокала — это жидкость, полученная от сбраживания винограда. А содержание — это вино, которое мы пьем за здоровье юбиляра. Обращаясь к более общим формулировкам, *содержимое* — это та *материя*, которая представлена в данной *форме*, а *содержание* — это та *функция*, которую эта материя в этой форме выполняет в нашей жизни и деятельности. Содержимое — объективно, зачастую вещественно, видимо. Содержание — субъективно, невидимо, оно может только мыслиться. Поэтому темы и параграфы школьного учебника или пункты образовательной программы — это всего лишь содержимое. А что является содержанием? Об этом и речь в данной работе.

Данная работа является первой из серии публикаций. В настоящей статье, обсуждается различение содержимого и содержания и обосновывается значение математики не как совокупности фактов, теорем, объектов или тем, а как совокупности специальных *мыслительных средств.* В последующих система представлений, которая построена здесь, будет применена для подробного описания как формальной (темпо-ритмической), так и содержательной (как процесса освоения мыслительных средств) сторон математического образования в его простейшей, арифметической компоненте.

*1. **Проблематизация***

Математическое образование, созданное в свое время трудами целой плеяды ученых и педагогов, в настоящее время в основном движется по инерции, испытывая лишь модификации косметического характера. Обсуждения того, какие темы/теоремы/задачи включить или исключить из курса школьной математики, базирующееся на аргументах типа «нельзя считать себя образованным человеком, если не знаешь…» или, наоборот, «дети и так не могут этого понять, да и в жизни оно им никогда не понадобится…», очевидно, не может быть продуктивным. Само наличие такого рода аргументации показывает, что действительные основания для построения курса математики утрачены.

С другой стороны, развитие компьютерных технологий, появление электронных образовательных ресурсов, дистанционных курсов, масштабных диагностических процедур и т.п. ставит принципиальный вопрос о том, как должно быть построено математическое образование в целом, чтобы все эти ресурсы и средства были использованы результативно, продуктивно и эффективно. А для этого нужны принципиальные основания, опираясь на которые можно оценивать и результативность, и продуктивность, и эффективность, а отнюдь не рассуждения на уровне «полезности» конкретных тем, задач или теорем. Решение возникшего конфликта и лежит в русле различения содержания как основания и содержимого как материала, который организуется определенным образом, исходя из этого основания.

Итак, если мы примем, что таблица умножения, теорема Пифагора, формулы Виета и т.д. — это всего лишь содержимое, причем школьных учебников (а то, что это содержимое учебников, — это безусловно), то нам нужно будет разобраться, во-первых, что является *содержанием* этих учебников (что вторично, поскольку учебник — всего лишь средство), а во-вторых, что самое главное, какое отношение *содержимое учебников* имеет к *содержанию образования*. Важно также иметь в виду, что слово «образование» имеет два принципиально разных смысла — «образование» как процесс и «образование» как результат этого процесса. Так что нам попутно придется выяснить, одно и то же содержание у процесса и у результата или они разные?

Проще, кажется, разобраться с результатом. Если считать результатом *образованного человека*, то *содержимое* результата — то, что он «знает» и «умеет» (что обычно проверяется объективным образом). Обычно в образовательных программах мы еще пишем, что он в результате чем-то «владеет» и что-то «способен» (что проверить гораздо труднее, обычно такого рода фиксации строятся на основе измерения «знаний» и «умений» и более-менее спорных умозаключений). А также что он в чем-то «компетентен» (что, как всеми признано, является непроверяемым в принципе и на самом деле фиксируется как факт уже в основном в некрологах).

Что же отнести к *содержанию* образования как результата? То, что фиксируется в некрологах? Это означает фактически отказ от конструктивной и ответственной педагогической позиции (когда мы можем гарантировать тот или иной педагогический результат) и превращение образования в некую *магию*, где в результате каких-то *магических действий* иногда получается, а иногда — не получается *чудо* в виде «образованного человека».

Отнесение к *содержанию* «владения» чем-то (например, какими-то понятиями или методами решения задач) или, тем паче, «способности» (опять же, решать какие-то задачи) — требует разработки системы обоснования этих «владений» и «способностей» как общих характеристик человека, что весьма сложно, поскольку они не являются видимыми, а только мыслимы. К тому же мы явно уходим от зафиксированного нами представления о *содержании* как *функции содержимого* в нашей жизни и деятельности.

Какова функция наших математических «знаний» и «умений»? Зачем они нам? Как мы их используем в дальнейшей жизни? Тут обнаруживается ряд парадоксальных, хотя и общеизвестных фактов.

1. Из курса школьной математики мы много чего «знаем». Знаем таблицу умножения. Знаем формулы сокращенного умножения. Знаем теорему Пифагора. Знаем формулу синуса суммы. Знаем даже, чему равна производная от арктангенса. Однако все это «знание» мы никогда в жизни не применяем (если не считать, правда, профессиональных математиков, физиков и инженеров, но о профессиональном применении математики мы поговорим отдельно).

2. Опять же, благодаря школьному курсу математики, мы много чего «умеем». Умеем решать уравнения (как минимум линейные и даже квадратные). Умеем решать «текстовые задачи». Умеем дифференцировать и иногда даже интегрировать. Умеем «доказывать» (мы чуть позже обсудим, почему «доказывать» стоит в кавычках) геометрические теоремы. Умеем даже, как это ни странно, находить высоту дерева с помощью подобия треугольников. Но на вопрос о том, где и когда в нашей обыденной жизни нам эти умения приходится применять, мы можем ответить однозначно — нигде.

3. Бесполезность наших школьных математических «знаний» обнаруживается и на профессиональном уровне. Для профессиональных математиков все эти «знания» интереса не представляют, поскольку они являются знанием о решении задач, которые давно решены (порой даже в глубокой древности) и решением которых профессиональные математики не занимаются. А занимаются они решением тех задач, у которых решения нет — ни в учебнике, ни в монографиях, ни в статьях. Нигде нет, в культуре нет. И неизвестно, имеют ли они решение в принципе. Работа с такими задачами не имеет ничего общего с решением задач, для которых известен и метод решения, и результат (который написан в конце учебника). Так что и с точки зрения «умений» пользы от школьной математики для профессиональной практически нет. И именно с этим, кстати, связан известный эффект, когда вполне успешно решавший школьные и олимпиадные задачи ученик, попав на математический факультет университета, оказывается вдруг «неспособным» к математике.

4. Что же касается физиков и инженеров, то и для них все эти школьные «знания» в чистом виде являются ненужными. Математикой они пользуются на уровне таблиц и справочников, это и раньше не составляло особой проблемы (поскольку профессионалы обычно все необходимые справочники имели), а сейчас, в эпоху Интернета, нам практически немедленно доступны любые необходимые сведения из математики, не только школьного, но и в значительной степени профессионального уровня. То же касается и математических

«умений» — современные системы математический вычислений типа MathCad, MathLab, Wolfram Mathematica и др. совершают с недоступной для человека скоростью недоступные для человека (в силу, прежде всего, их громоздкости) вычисления.

5. Правда, для того чтобы пользоваться и математическими сведениями, и математическими системами, нужно уметь ими пользоваться. Но тут появляется вопрос, что означает это «уметь пользоваться» и какую роль в этом умении играет *содержимое* школьных учебников? Мы на этом вопросе остановимся чуть ниже.

Ну а пока что нам придется зафиксировать ту мысль, что вопрос о *содержании* школьного математического образования как результата, то есть о том, какую функцию это математическое образование играет в жизни человека, не имеет разумного решения ни в терминах «тем», ни в терминах «знаний» и «умений».

Но, может быть, это заход «не с той стороны», ведь образование как результат — всего лишь следствие образования как процесса? Но тогда нужно ответить на вопрос, что является *содержимым* и *содержанием* для *процесса* математического образования.

Не сомневаясь, можно назвать три типа работы, которая осуществляется в образовательном процессе. Во-первых, учащиеся что-то *запоминают*, или, как мы обычно говорим, «учат». Во-вторых, они что-то *решают*. И, в-третьих, они что-то *доказывают*. Попробуем разобраться с этими типами работы.

Заучивание является широко распространенным типом учебной работы, известным еще с глубокой древности. Еще Пифагор делил своих учеников на *акусматиков* и *математиков* (Ямвлих Халкидский, 2002).

Акусмы — это формулировки, содержащие некие «истины», которые как раз и требуют заучивания. Что верно, что неверно, что правильно, что неправильно, как надо делать что-то, а как не надо и т.д.

Акусмами мы пользуемся повсюду. Любой кулинарный рецепт — это акусма. Инструкция по пользованию любым прибором, от надувного мячика до компьютера — акусма. Правила поведения за столом — акусмы. Правила профессиональной этики — акусмы. Библейские заповеди — акусмы.

Акусмы позволяют нам жить в мире очень сложных вещей и сложных социальных взаимоотношений, не вникая до глубины в сущность всех без исключения вещей и отношений (что в рамках человеческой жизни просто невозможно). Поэтому акусматическая часть образования — одна из важнейших, необходимых и для повседневной жизни, и для профессиональной деятельности.

Но почему же Пифагор делил всех на *акусматиков* (тех, кто выучивал акусмы и прекрасно с помощью них жил; это ведь от них идет «Magister dixit» — «Учитель сказал») и *математиков*? В чем суть различения?

Для того, чтобы понять это, нужно зафиксировать, что *акусмы* задают то, что касается исключительно материального и социального мира. Их роль важна именно потому, что они определяются законами этого мира, которые носят объективный характер. Их несоблюдение приведет в лучшем случае — к разочаровывающим, а в худшем — к печальным последствиям.

Другое дело — математика. Все, с чем имеет дело математика, относится к миру *мыслимого*. И именно этим определяется ее отличие от всего остального. *Акусмы* для мыслимого *бессмысленны*. С тем, что мы мыслим, можно делать все, что вздумается, и оно не оказывает сопротивления, поэтому то, что является главным основанием для соблюдения *акусмы, — реальность, которая от нас не зависит*, для мыслимого основанием не является.

Поэтому *заучивать математику бессмысленно*, и этот тип работы, известный в образовании, для математики закрыт. Более того, заучивание как самоцель (или, как иногда говорят: «Выучи, потом, может, поймешь!») оказывается просто вредным, поскольку и историческое развитие математики, и освоение ее в школьном курсе связаны с постоянным пересмотром того, что правильно, а что неправильно, что верно, а что неверно, как можно делать, а как нельзя. Сначала нельзя было разделить 3 на 2, а потом стало можно. Сначала нельзя было извлекать квадратный корень из отрицательных чисел, а потом стало можно. Сначала нельзя было делить на нуль, а потом почему-то стало можно. И так далее.

Все эти «вольности» и смены определяются именно тем, что математика имеет дело с *мыслимыми* вещами, и все, что касается таких вещей — ничем не ограничено. Формально оно может быть *произвольным*.

Таким образом, первый тип учебной работы — заучивание — для математики сам по себе бессмыслен. Конечно, с другой стороны, каждый понимает, что отказываться от запоминания вообще в математике тоже невозможно. Как же быть? Сформулированное нами противоречие показывает фактически, что запоминание (выучивание) нельзя рассматривать как единицу *содержания* математического образования как процесса — его нельзя строить из таких единиц, как «выучить что-то» (что обычно учителя и «задают на дом»). Единицей *содержания* математического образования является что-то другое, а «выучивание» — всего лишь внешне наблюдаемое действие, обеспечивающее эту содержательную единицу, то есть, опять же, то, что скорее можно отнести к *содержимому* образовательного процесса.

Второй тип учебной работы — решение разных задач — считается чуть ли не главным в математическом образовании, но вот почему — ясного ответа на этот вопрос нигде нет. Зато есть ясные сомнения: как уже говорилось, решение школьных задач ни в обыденной, ни в профессиональной жизни никакой ценности не представляет, и умение решать эти задачи — тоже.

А что стоит за решением школьных задач, что представляет ценность? Обычно ответы на этот вопрос уводят нас в область неопределенных формулировок типа «они учат думать» или «они ум в порядок приводят», отношение которых к процессу решения остается неопределенным. А пока ни механизм «приведения ума в порядок», ни сам этот «порядок» никак не описан и не предъявлен, мы опять оказываемся в ситуации *магического действия*, в котором у некоторых учащихся в результате решения каких-то задач чудесным образом появляется «математическое образование» как результат. И здесь мы можем зафиксировать, что видимый, наблюдаемый процесс решения задач — это лишь *содержимое* процесса математического образования, *содержание* и тут не то чтобы скрыто (раз уж мы говорим, что «учит думать» — значит, что-то за этим стоит!), но вот связь того и другого оказывается какой-то магической.

Наконец, третий тип учебной работы — доказательства — на самом деле ничем не отличается от первого. Поскольку «доказательства» в школе — это те же *акусмы*, то есть рассуждения, построенные так, как *правильно*. И эту *правильность* просто нужно запомнить. Настоящей доказательности в школе не учат и учить не могут в принципе, поскольку там нет *доказывания* как такового — коммуникации, в которой одна из сторон убеждает другую в чем-то, в то время как та в худшем случае — сомневается по любому поводу, а в лучшем — еще и аргументированно возражает. «Доказательство» в школе — это *рассуждение*, то есть цепочка *суждений*, выстроенных по определенным *правилам*. И от учащегося требуется *запомнить*, «как правильно» (то есть выучить соответствующие *акусмы*), и, следуя этим правилам, фактически *решать задачи*, но задачи не на то, чтобы найти что-то, а на то, чтобы из суждения А, следуя правилам, получить суждение B (что, с точки зрения операциональной, не слишком отличается от обычной задачи — из данных A получить данные B, пользуясь определенными правилами преобразования этих данных).

И здесь мы оказываемся в той же ситуации: *наблюдаемые* нами процессы «доказывания» и некое «развитие логического мышления» как результат оказываются связанными *магическим* образом.

Таким образом, мы видим, что каждый раз, пытаясь обсуждать *содержание* математического образования, мы обнаруживаем, что обсуждаем *содержимое*. *Содержимое* учебников, представленное темами, правилами, задачами, теоремами. *Содержимое* математического образования как результата, представленное знаниями и умениями. *Содержимое* процесса образования, представленное запоминанием, «решанием» и «доказыванием». А *содержание* постоянно ускользает, и если мы его даже каким-то образом фиксируем, то все равно его связь с содержимым оказывается *магической*.

Причина этого, на самом деле, одна и та же. Она в том, что мы во всех обсуждениях брали предметом то, что *видимо*. Забывая, что *содержание математического образования*, как и любое другое *содержание, видимым* быть не может. Оно всегда *мыслимо*.

Только в своей мысли мы придаем целостность разрозненным действиям в виде какой-то *деятельности*. Только в своей мысли мы выделяем в этой деятельности *структуру* и *функции*. Только в своей мысли мы связываем эти функции со своими *действиями* и приписываем своим делам то или иное функциональное назначение. Именно поэтому, разговаривая о видимом, мы никогда не найдем в нем содержания. В том числе и *содержания* образования. И математическое образование здесь не является исключением.

2. Методологическая прелюдия

Переходя к вопросу об определении *мыслимого* содержания математического образования, нам придется начать с некоторых базовых вопросов, без разрешения которых мы останемся без опоры в дальнейших суждениях. А без достаточных оснований мышление легко превращается в фантазию и бессмысленную игру терминами и понятиями.

Первый вопрос — о том, что же мы будем полагать первичным из трех обсуждавшихся аспектов образования — учебник (то есть средство), процесс или результат? Здесь принятие того или иного решения зависит от выбора позиции. Если бы мы были работодателями, то в качестве главного поставили бы результат, ибо именно он для нас был бы значим. Но автору ближе позиция педагогическая, а с точки зрения педагогической позиции в качестве главного нужно выбрать процесс — то, в чем педагог, собственно говоря, и находится.

Нет сомнения, что из разных позиций мы получим разные представления не только о содержании образования, но и об образовании вообще, однако ответ на этот вопрос не является темой данной работы. Различие здесь упомянуто лишь для того, чтобы зафиксировать выбор *педагогической позиции* как стартовой точки и далее отправляться именно от нее.

Итак, положив в качестве главного в образовании (в частности, математическом) процесс, мы должны ответить на вопрос о том, что мы должны мыслить как содержание этого процесса?

Для того чтобы не путаться в терминах, удобнее всего начать двигаться от наиболее абстрактных категорий, постепенно конкретизируя их. В абстрактных категориях *процесс* (неважно, какой) должен характеризоваться только теми характеристиками, которых *не может не быть,* независимо от типа или вида процесса. Такими характеристиками являются две — это, во-первых, наличие каких-то изменений (без которых о процессе говорить бессмысленно: в чем состоит процесс, если ничего не меняется?), а во-вторых, наличие временной характеристики, которая называется *темпо-ритм.* Темп характеризует быстроту непрерывных, а *ритм* — дискретных (скачкообразных) изменений.

Переходя к категориям формы — содержания — содержимого, нетрудно соотнести выделенные характеристики с этими категориями. Темпо-ритм естественно полагать формой процесса, изменения же, поскольку мы говорим о *наблюдаемых* изменениях, — отнести к *содержимому*. А что же *содержание*? Что мы мыслим в любом процессе, каким бы он ни был? Мыслим мы *единство* темпо-ритма и изменений, которое обычно называем словом *развитие*, и именно это слово придает *процессу* определенный *смысл*.

Именно за счет понятия *развития* мы можем конкретизировать процесс по содержанию и сказать, что за *развитие* мы полагаем именно в образовательном процессе. Очевидно, что их два. С одной стороны, это *психическое развитие ребенка*, с другой — *социально-деятельностное развитие детского сообщества* (в более широких масштабах — нового поколения). Оба этих процесса развития и составляют функциональное содержание образовательного процесса.

Если же еще более конкретизировать, то *содержанием процесса образования* именно *математического* является *интеллектуальное развитие.*

В чем же состоит это «интеллектуальное развитие»? Обсуждая этот вопрос, чтобы не скатываться в банальности, нужно заранее отказаться от оперирования лозунгами типа:

- «математика — гимнастика ума» (поскольку тогда нужно сказать, что именно в этом уме тренирует математика, а это вряд ли кто сможет сказать);
- «математика ум в порядок приводит» (поскольку тогда нужно хотя бы схематично описать этот порядок, и это тоже никто не опишет);
- «математика — царица наук» (это уже вообще из области метафор);
- «математика — язык природы» (поскольку математика от языка отличается приблизительно так же, как медицинские таблетки от бифштекса — мы и то, и другое едим, но это не значит, что таблетки — это еда)

и аналогичных им и признать, что мы не можем чисто рассудочными средствами ответить на этот вопрос.

Это не случайно: ответ на поставленный вопрос нетривиален, и рассудочными средствами его действительно получить невозможно. Этот ответ был получен в результате психологических исследований и сформулирован Л.С. Выготским (Выготский, 1983) следующим образом: *психическое* (в том числе интеллектуальное) *развитие* состоит в том, что ребенок осваивает имеющиеся в человеческой культуре *средства*, позволяющие ему управлять своим собственным поведением.

В случае математики формула Л.С. Выготского превращается в следующий, первый из тезисов, которые мы хотим сформулировать как центральные:

Содержанием математического образования как процесса является интеллектуальное развитие, состоящее в освоении ребенком средств математического мышления и различных способов их использования.

*3. **Средство в культурном контексте***

Понятие *средства* является центральным в современной педагогической психологии, поэтому на нем следует остановиться более подробно. История человечества нам представляется, прежде всего, как история развития *материальной культуры* — поскольку прошлое нам представлено как набор ископаемых *артефактов*, по которым мы делаем выводы о том, что люди умели, знали и понимали.

Такими артефактами являются, прежде всего, *орудия*, то есть специально обработанные или изготовленные вещи, позволяющие человеку делать что-то *опосредствованно*. Да, землю можно рыть руками, но мы почему-то предпочитаем копать лопатой. *Орудие* в системе представлений о человеке является одним из главных свидетельств того, что мы имеем дело не просто с человекообразным животным, а с человеческой *культурой*. По уровню развития орудий мы судим об уровне развития человека как *культурного* существа.

Аналогичную функцию, но только в социальных отношениях, выполняют *украшения*. Они, с одной стороны, являются *знаком*, обозначающим положение в социальной системе, а с другой — являются также *знаком*, обозначающим отношения между людьми (например, когда выступают в качестве подарка). И здесь оказывается, что развитая *знаковая система* свидетельствует об уровне *культуры*. *Знак* выполняет в социальных отношениях такую же роль, как *орудие* в материальной деятельности, — он является *средством*, он выполняет функцию *опосредствования*.

Гораздо сложнее дело обстоит с историей человеческой психики и интеллекта — они не оставляют после себя материальных следов. Правда, мы об их уровне развития тоже судим — косвенным образом, по артефактам. Вместо палки-копалки появилась мотыга — о, значит, орудие уже не является естественной вещью, лишь специально обработанной, оно *специально сделано!* Значит, человек, который сделал это орудие, процесс обработки земли *мыслил* до того, как начал копать. Аналогично появление *специально сделанных* украшений (а не просто ожерелий из перьев или костей) означает, что социальные отношения стали мыслиться, стали *осознаваться*.

Но все это были лишь фиксации результата развития человеческой психики и интеллекта, которые ничего не могли сказать об их устройстве.

Момент, с которого начинается возможность исследовать их развитие не на основе догадок и предположений, а на основании артефактов, — это появление письменности и письменной речи. Именно на сохранившиеся *документы* прошлых эпох мы смотрим как на источник более-менее достоверного знания о развитии человеческой психики и интеллекта и по ним реконструируем историю их развития. В частности, мы обнаруживаем *различные средства счета и учета, средства решения различных задач (в частности, средства обозначения неизвестного), схематические средства, средства организации рассуждений (логические средства)* и многие другие.

Таким образом, оказывается, что наличие *мыслительных средств* является не каким-то академическим изыском, а, наоборот, проявлением в области интеллекта общего феномена *опосредствования* как фундаментального фактора человеческой *культуры*.

4. ***Типы математических мыслительных средств***

Какие же мыслительные средства мы используем в математике? На самом деле основные мыслительные средства делятся на три типа. Это средства *знаковые,* средства *идеальные*[1] и средства *понятийные*.

Знак — это элемент отношения знак-обозначаемое (денотат-коннотат). *Знаковые средства* в человеческой культуре выполняют вполне определенную функцию: они позволяют заменить действия с вещами действиями со знаками. В математике используется огромное разнообразие знаковых средств — цифры, числа (это уже сложные знаки), буквы, формулы, схемы, графики и др. Все они предназначены для того, чтобы совершить какие-то действия не с реальным объектом, а *мысленно*, и в этом и состоит их основная функция.

При этом переход от реального объекта к знаку связан с операцией *абстрагирования*, то есть отвлечения от всего того, что для данного действия (или системы действий) несущественно, и выделения и *обозначения* того, что существенно. И если в материальном мире мы человеческое действие приспосабливаем к предмету нашего действия, то в мире знаков мы, наоборот, знаки приспосабливаем к нашему действию. Именно поэтому оперировать знаками всегда проще, чем реальными вещами, и в этом и состоит основной эффект использования знаковых средств.

Любая деятельность связана с целой *системой* действий, которая может быть достаточно сложной. Поэтому применение знаковых средств, позволяющих эти действия осуществлять мысленно, дает целый ряд *операциональных знаковых систем,* внутри которых также может осуществляться операция абстрагирования. Так, операции с буквами, обозначающими *величины,* используемые в алгебре, являются результатом абстрагирования операций с числами (обозначающими *количества*), с которыми мы имеем дело в арифметике. В результате мы получаем ту самую *многоуровневую систему абстракций,* которая нам вроде бы известна, но которую мы, в силу ряда причин,

---

[1] Не путать с идеями, которые также являются мыслительными средствами, но они функционируют в области проблемного мышления, которое мы здесь не обсуждаем, так как в школе о нем речи не идет.

воспринимали как «систему вещей», в то время как она является на самом деле *системой средств мышления*.

По большому счету *абстрактное мышление* — это как раз владение, в той или иной степени, абстрактными мыслительными средствами, но при этом главным является не столько операциональная часть (оперирование в абстракциях, как правило, — достаточно простая вещь), сколько освоение переходов между уровнями абстракции и удержание связи между ними.

Удержание связи между двумя соседними уровнями абстракции доступно любому (как, например, связь между натуральным количеством и числом, его обозначающим). Синхронизация движения мысли в трех-четырех слоях абстракций требует определенной тренировки и является уже профессиональным навыком (без специального обучения вряд ли человеку удастся удерживать в своем мышлении связь между тремя разными представлениями об интегрировании — как об операторе, как о некоторой системе операций со знаками и как о предельном отношении в суммировании). Ну а удержание большего количества уровней абстракции — уже некий дар, воспроизводство которого для современного уровня развития образовательных технологий и методик пока не представляется возможным.

Второй тип мыслительных средств — *идеальные*. Это средства, позволяющие рассуждать и что-то доказывать. Сумма углов треугольника равна 180 градусам только для *идеального* треугольника, составленного из *идеальных* отрезков *идеальных* прямых линий. И *доказать* этот факт мы можем только для *идеального* треугольника.

Идеальные мыслительные средства образуются в результате *идеализации*, то есть некоего *предельного перехода*, выражаемого обычно словами типа «в конце концов». Мы можем нарисовать толстую линию. Можем более тонкую. Можем еще более тонкую. Если мы *мысленно* представим себе, что мы рисуем все более тонкие линии, то «в конце концов» мы получим *идеальную* линию (которая, как писал Евклид, «не имеет ни ширины, ни высоты, а имеет только длину»).

Таким образом, мы видим, что *идеальные* средства мышления производятся только в мысли и только там и существуют. И теперь становится понятным, что *геометрия* имеет дело исключительно с идеальными объектами. И обучение геометрии — это не обучение рисованию и рассматриванию треугольников и окружностей на бумаге, а это обучение рисованию и рассматриванию их в мышлении. Рисунки на бумаге — лишь визуальная опора, позволяющая облегчить труд постоянного удержания в мысли сложного объекта.

Ну а в целом *логическое мышление* — это и есть оперирование идеальными объектами, позволяющими представить *мысленно* причинно-следственные связи окружающего нас мира. В отличие от системы абстрактных мыслительных средств, устроенных иерархически, система идеальных мыслительных средств устроена скорее наподобие сети. Впрочем, как и те отношения, которые она представляет.

Наконец, третий тип мыслительных средств — *понятийные* — используется для установления связей, отношений между реальными объектами и абстракциями, между абстракциями разного уровня, между реальными и идеальными объектами, между различными идеализациями и т.д. По большому счету любое *понятие* — это всегда *отношение* между чем-то и чем-то.

Следует подчеркнуть, что атрибуты «абстрактный» и «идеальный» на самом деле можно относить только к базовым мыслительным средствам (что мы и сделали в приведенных примерах). Несомненно, операции с идеальными мыслительными средствами могут быть перенесены на ту или иную систему знаков (собственно, так и происходит в геометрии — мы, сформировав представление об идеальной прямой линии, тут же обозначаем ее и начинаем говорить «прямая AB» или «прямая a»). И наоборот, со знаковыми средствами мышления может производиться операция идеализации (и именно так и происходит в школьной алгебре: вещественные числа — это уже идеальные сущности, построенные на числовой знаковой системе). Поэтому более точным является представление об *абстрагировании* и *идеализации* как специфических операциях мышления, которые производят новые мыслительные средства двумя разными способами, и вопрос о том, считать мыслительное средство идеальным или знаковым, зависит от того, в каком *понятийном отношении* это мыслительное средство присутствует — то ли это знак, то ли идеализация чего-то другого.

В свою очередь, поскольку одно и то же мыслительное средство может состоять в разных понятийных отношениях с другими, выбор того или иного отношения определяется уже тем, в какую *операциональную систему* включается это мыслительное средство. Число как предмет оперирования (вычислений) и число как предмет выявления и выстраивания причинно-следственных связей («доказательств») — это одно и то же число, только рассматриваемое в одной ситуации — как знаковое мыслительное средство, а в другой — как идеальное. Поэтому, по большому счету, атрибут «знаковый» или «идеальный» является атрибутом не конкретного мыслительного средства, а *системы*, в которую оно включено и используется.

А типология мыслительных средств — это в конечном счете типология *систем мыслительных средств*.

Любопытным является то, что все три типа систем организации данных, используемых в компьютерных технологиях, — реляционные (relation = отношение), иерархические и сетевые — являются по существу лишь технически реализованными типами организации систем, используемых в человеческом мышлении, которые, в свою очередь, представляют системы реального мира — материальные, социальные и психические.

При этом важным оказывается тот факт, что отношения между системами мышления и системами реальными (другими словами, системами *деятельности*) в принципе не являются *отношениями* отражения (как это часто понимается в вульгарном философствовании), поскольку тип мыслительной системы никогда не совпадает с типом мыслимой системы. Эти отношения являются отношениями *управления*, и именно поэтому управляющая система имеет иной, по отношению к управляемой, тип.

*5. **Функции мыслительных средств***

Теперь, когда мы зафиксировали, в первом приближении, *содержание математического образования* как *процесса*, мы обретаем возможность обратиться к вопросу о содержании математического образования как *результата*. Для этого нам необходимо понять, как в итоге используются образованным человеком освоенные им математические мыслительные средства. А чтобы ответить на этот вопрос, нужно снова выйти в слой более абстрактных понятий и ответить на вопрос о том, *что* мыслится с помощью мыслительных средств.

Здесь нужно обратить внимание на уже введенное выше (правда, мимоходом) различение *видимого* и *мыслимого*. То, что мы видим — мы видим здесь и сейчас. Правда, *воображение* позволяет нам вспомнить, «увидеть» что-то, что было в прошлом, что мы видели раньше. Но польза от этого весьма относительная.

Иллюстрируя на уровне обыденных представлений, можно сказать, что мы либо видим кефир на полке магазина — и тогда нет смысла его мыслить, его нужно или купить, если он нужен, или пройти мимо, если не нужен. Либо мы этот кефир не видим — и тогда нет смысла его воображать, даже если он очень нужен. Все равно он не появится.

А что же мы в этой ситуации *мыслим*? А мыслим мы то, что кефир на полке магазина появляется не случайно — его привозят, причем ежедневно, с молокозавода. И вот за счет того, что мы *мыслим* эту логистическую систему (пусть не детально даже, а очень грубо, приблизительно), мы *знаем*, что он на полке *был*, и его нет только потому, что его до нас раскупили. Опять же, мы знаем, что он завтра на этой полке *будет*, и если мы придем пораньше, то нам он тоже достанется. Обратно: если мы прочитали в Интернете про аварию на молокозаводе, то мы знаем, что завтра этого кефира *не будет,* и побежим немедленно запасаться этим кефиром впрок.

Этот бытовой пример показывает нам, что мыслим мы некие *отношения* (называемые обычно *сущностными*), благодаря которым мы можем что-то знать и про прошлое, и про будущее (которые в данный момент для нас невидимы), и про то, что мы никогда не видели и не увидим. В случае с кефиром эти были отношения между производителем кефира, перевозчиком и продавцом. «Производитель», «перевозчик» и «продавец» — это абстрактные понятия, которые мы не можем увидеть, их можно только мыслить.

На молокозаводе не написано «Производитель», там написано «Молокозавод». Не написано потому, что «Производителем» он является только в отношении поставок кефира — тех, которые *нас интересуют* как покупателя. Для молочной фермы он «Покупатель», для строительной организации, которая строит новый цех, — «Заказчик», для работника этого молокозавода — «Работодатель».

Участвуя в той или иной *деятельности*, мы выделяем в окружающем нас мире то, что является *существенным для этой деятельности* (в нашем примере — цепочка поставок кефира). Для того чтобы это существенное как-то выделять и фиксировать, мы создаем *мыслимые абстрактные сущности* (в нашем случае это были понятия «Производитель», «Перевозчик», «Продавец») и представляем нужное нам существенное в виде *отношения между сущностями.*

Вот отношения между сущностями и есть то, что *мыслится* с помощью мыслительных средств. В худшем случае мы эти отношения можем просто *представить*, в лучшем — мы можем совершать с ними еще и мысленные *операции*, в идеальном — мы можем, продумав и спланировав все заранее *мысленно, создать* нечто новое — то, чего в реальности до того не было.

Таким образом, мы можем сформулировать второй центральный тезис нашей работы.

Значимость математики в человеческой культуре — в том, что ее мыслительные средства позволяют мыслить отношения между сущностями различной природы. Поэтому математическое

образование как результат состоит в том, чтобы уметь с помощью математических мыслительных средств мыслить отношения между сущностями различной природы.

Заключение

Таким образом, решая проблему содержания математического образования, мы ввели, на основе различения видимой (материальной) и мыслимой (функциональной) сторон человеческой деятельности, общее различение *содержания* и *содержимого* математического образования. Благодаря этому в категории процесса мы выделили форму (темпо-ритм), содержимое (изменения) и содержание (развитие). Соответственно, содержанием процесса математического образования оказалось *интеллектуальное развитие,* под которым, следуя уже психологической концепции Л.С. Выготского, следует понимать *освоение мыслительных средств,* в случае математики — математических мыслительных средств.

На основе анализа функции математики в человеческой культуре мы обосновали, что *содержанием математического образования* как *результата* (или, как иногда говорят, *математической образованности*) оказывается *умение использовать математические мыслительные средства* для того, чтобы *мыслить отношения между сущностями различной природы.*

В последующих работах мы покажем, что способность мыслить отношения между сущностями разной природы фактически сводится к двум способностям — владению *математическими отношениями* и системами операций с этими отношениями с одной стороны, и умению устанавливать изоморфизм этих отношений и отношений между теми или иными предметными сущностями с другой, что и проявляется в *решении задач.* Далее будет подробно описана темпо-ритмическая структура образовательного процесса и связь между содержимым (то есть теми или иными темами, объектами, правилами и т.п.) и содержанием (то есть освоением мыслительных средств и их применения) в курсе арифметики средней школы.

Литература

Беба, Д.Н., Гуреев, В.А. (2023). Методические особенности учебников А.П. Киселева. *Ученые записки Орловского государственного университета, 3*(100), 180–183.

Богуславский, М.В., Садовников, Е.Ю. (2023). Анализ содержания программы общего математического образования 1970-х гг. *Гуманитарные исследования Центральной России, 3*(28), 49–60.

Выготский, Л.С. (1983). История развития высших психических функций. Собрание сочинений в 6 т. Т. 3. Проблемы развития психики. Москва: Педагогика.

Горбачев, В.И. (2011). Содержание общего математического образования и математическая картина мира. *Вестник Брянского государственного университета, (1)*, 282–294.

Горев, П.М., Белова, О.Ю. (2016). Содержание и структура курса непрерывного дополнительного математического образования учащихся 3–6-х классов средней школы. *Научно-методический электронный журнал «Концепт»,* (S1), 31–35.

Рослова, Л.О., Алексеева, Е.Е., Буцко, Е.В. (2022). МАТЕМАТИКА. Реализация требований ФГОС основного общего образования: Методическое пособие для учителя. Москва: Институт стратегии развития образования РАО.

Снегурова, В.И., Подходова, Н.С., Орлов, В.В. (2018). Особенности отбора и реализации содержания школьного курса математики. *Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена,* (190), 175–182.

Ямвлих Халкидский. (2002). О Пифагоровой жизни. Пер. с древнегреч. И.Ю. Мельниковой. Москва: Изд-во «Алтейа».

References

Beba, D.N., Gureev, V.A. (2023). Methodological features of textbooks by A.P. Kiseleva. *Uchenye Zapiski Orlovskogo Gosudarstvennogo Universiteta* (*Scientific Notes of Oryol State University), 3*(100), 180–183. (In Russ.).

Boguslavsky, M.V., Sadovnikov, E.Yu. (2023). Content analysis of the general mathematics education program of the 1970s. *Gumanitarnye Issledovaniya Central'noj Rossii (Humanitarian Studies of Central Russia), 3*(28), 49–60. (In Russ.).

Gorbachev, V.I. (2011). The content of general mathematical education and the mathematical picture of the world. *Vestnik Bryanskogo Gosudarstvennogo Universiteta* (*Bulletin of Bryansk State University),* (1), 282–294. (In Russ.).

Gorev, P.M., Belova, O.Yu. (2016). Content and structure of the course of continuous additional mathematical education for students in grades 3–6 of secondary school. *Nauchno-metodicheskij elektronnyj zhurnal "Koncept"* (*Scientific and Methodological Electronic Journal "Concept"),* (S1), 31–35. (In Russ.).

Iamblichus Chalcis. (2002). On the Pythagorean life. Per. from ancient Greek I.Yu. Melnikova. Moscow: Aletheia Publ. (In Russ.).

Roslova, L.O., Alekseeva, E.E., Butsko, E.V. (2022). MATHEMATICS. Implementation of the requirements of the Federal State Educational Standard for basic general education: A manual for teachers. Moscow: Institute for Education Development Strategy RAO. (In Russ.).

Snegurova, V.I., Podkhodova, N.S., Orlov, V.V. (2018). Features of the selection and implementation of the content of a school mathematics course. *Izvestiya Rossijskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. A.I. Gercena* (*News of the Russian State Pedagogical University named after A.I. Herzen)*, (190), 175–182. (In Russ.).

Vygotsky, L.S. (1983). History of the development of higher mental functions. Collected works: in 6 vol.Vol. 3. Problems of mental development. Moscow: Pedagogy Publ. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Алексей Владиславович Боровских, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация, bor.bor@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2212-2047

ABOUT THE AUTHOR

Alexey V. Borovskikh, Dr. Sci. (Physical and Mathematical Sciences), Professor of the Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, bor.bor@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2212-2047

Поступила: 23.04.2024; получена после доработки: 19.05.2024; принята в печать: 22.05.2024
Received: 23.04.2024; revised: 19.05.2024; accepted: 22.05.2024